

А. В. ПОГОРЕЛОВ

ИЗГИБАНИЯ  
ПОВЕРХНОСТЕЙ  
И УСТОЙЧИВОСТЬ  
ОБОЛОЧЕК



МОСКВА «НАУКА»

ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1986

ББК 22.151

П43

УДК 514.862

Погорелов А. В. Изгибания поверхностей и устойчивость оболочек.— М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986.— 96 с.

Изложение геометрической теории устойчивости выпуклых упругих оболочек, опирающейся на основные факты теории конечных и бесконечно малых изгибаний поверхностей. В книге содержится ряд новых результатов, полученных в последние годы.

Для специалистов в области геометрии и механики, студентов и аспирантов соответствующих специальностей.

Ил. 25. Библиогр. 9 назв.

Рецензент

доктор физико-математических наук *В. А. Залгаллер*

П  $\frac{1702040000-085}{053(02)-86}$  22-86

© Издательство «Наука».  
Главная редакция  
физико-математической литературы,  
1986

# ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие . . . . .	4
§ 1. Изгибания поверхности и упругие деформации оболочек . . . . .	5
1. Основная задача теории оболочек и геометрический подход к ее решению (5). 2. Осесимметрическая деформация сферической оболочки (8). 3. Решение вариационной задачи для функционала $J$ (16). 4. Сопоставление теории с экспериментом (20).	
§ 2. Упругие состояния общих выпуклых оболочек . . . . .	24
1. Вариационный принцип А и его обоснование (24). 2. Изометрические преобразования выпуклых поверхностей с образованием ребер (35). 3. Энергия деформации выпуклой оболочки при зеркальном выпучивании (39). 4. Закритические упругие состояния выпуклой оболочки при нагружении внешним давлением (44).	
§ 3. Закритические упругие состояния цилиндрической оболочки при осевом сжатии . . . . .	50
1. Специальные изометрические преобразования цилиндрической поверхности (50). 2. Энергия закритической деформации цилиндрической оболочки (56). 3. Исследование закритических упругих состояний цилиндрической оболочки при осевом сжатии (60). 4. Экспериментальное определение нижней критической нагрузки для цилиндрической оболочки при осевом сжатии (66).	
§ 4. Бесконечно малые изгибания поверхностей и устойчивость оболочек . . . . .	70
1. Бесконечно малые изгибания поверхностей (70). 2. Вариационный принцип В и его обоснование (72). 3. Потеря устойчивости выпуклых оболочек под внешним давлением (79).	
§ 5. Потеря устойчивости цилиндрической оболочки при осевом сжатии . . . . .	86
1. Специальные бесконечно малые изгибания цилиндрической оболочки (86). 2. Исследование потери устойчивости цилиндрической оболочки при осевом сжатии (88). 3. Ограничение на применение вариационного принципа В при исследовании потери устойчивости разворачивающихся оболочек (91).	
Список литературы . . . . .	93

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемая книга содержит популярное изложение геометрической теории устойчивости упругих оболочек, основанной на некоторых результатах теории конечных и бесконечно малых изгибаний поверхностей. Наряду с известными результатами, содержащимися в монографии автора «Геометрические методы в нелинейной теории упругих оболочек», в книгу вошли результаты исследований, выполненных в последние годы. В частности, здесь содержится полное решение задачи об устойчивости сферических оболочек под внешним давлением без каких-либо предположений о характере выпучивания. В рамках принятой математической модели явления дано полное исследование потери устойчивости общей строго выпуклой оболочки, защемленной по краю, под внешним давлением. Рассмотрен вопрос о потере устойчивости цилиндрических оболочек при осевом сжатии и оценено влияние различных факторов на критическую нагрузку. Рассмотрены и другие вопросы. В отличие от упомянутой выше монографии здесь мы ограничиваемся сравнительно небольшим числом классических задач о потере устойчивости оболочек, но исследуем их более полно.

## § 1. ИЗГИБАНИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ И УПРУГИЕ ДЕФОРМАЦИИ ОБОЛОЧЕК

### 1. Основная задача теории оболочек и геометрический подход к ее решению

Оболочка — это упругое тело, у которого один из размеров (толщина оболочки) мал по сравнению с другими размерами. В настоящее время в связи с успехами в современной технологии получения оболочек они стали наиболее распространенными элементами различных конструкций. Это объясняется тем, что применением оболочек решаются одновременно две важные задачи: придание заданной формы конструкции и обеспечение необходимой прочности при минимальной массе.

Основная задача теории оболочек состоит в определении деформаций оболочки и возникающих в ее материале напряжений под действием заданной нагрузки. Один из методов решения этой задачи основан на вариационном принципе Лагранжа. Если действующая на оболочку нагрузка консервативна, т. е. производимая ею работа при деформации оболочки из исходной формы  $F$  в  $F'$  зависит только от формы  $F'$ , но не зависит от характера перехода из  $F$  в  $F'$ , то указанный вариационный принцип состоит в следующем.

Оболочка под действием данной нагрузки  $q$  среди всех возможных форм  $F'$ , удовлетворяющих условию закрепления вдоль края, принимает такую форму, для которой функционал

$$W = U(F') - A_q(F')$$

стационарен, т. е. его вариация  $\delta W = 0$ . Здесь  $U$  — энергия деформации оболочки,  $A_q$  — производимая внешней нагрузкой ( $q$ ) работа.

Если через  $u$ ,  $v$ ,  $w$  обозначить составляющие перемещения точек срединной поверхности оболочки при ее деформации, то подынтегральное выражение в энергии деформации  $U$  представляет собой довольно сложное выра-

жение, содержащее функции  $u$ ,  $v$ ,  $w$  и их производные до второго порядка. Уравнения Эйлера — Лагранжа для функционала  $W$  представляют собой систему трех дифференциальных уравнений четвертого порядка для функций  $u$ ,  $v$ ,  $w$ . Вполне понятно, что решение основной задачи теории оболочек на этом пути представляется довольно трудным.

В ряде случаев представляется возможным предположить известную малость смещения точек срединной поверхности и изменения ее нормальных кривизн при деформации. В этом предположении функционал  $W$  можно упростить, ограничиваясь квадратичной его частью. Соответствующая система уравнений Эйлера — Лагранжа будет линейной. Решение основной задачи теории оболочек в предположении указанной малости деформации составляет предмет линейной теории.

Если рассматриваемые деформации оболочки не сопровождаются значительными изменениями нормальных кривизн, в выражении энергии деформации  $U$  может быть опущено слагаемое, связанное с изгибом оболочки. Теория оболочек, включающая и это упрощающее предположение, называется безмоментной теорией оболочек.

Мы будем рассматривать такие упругие состояния оболочки, которые отличаются весьма значительными изменениями первоначальной формы. В этих рассмотренных принципиально недопустима линеаризация задачи, а также применение безмоментной теории. Однако, как мы сейчас покажем, именно предположение о значительных изменениях формы оболочки при ее деформации делает возможным новый подход к решению задачи, основанный на простых геометрических соображениях.

Дело в том, что наше предположение о значительных изменениях формы оболочки влечет за собой важное заключение о характере деформации. Именно: форма срединной поверхности оболочки при такой деформации неизбежно близка к одной из форм ее изометрического преобразования. Действительно, для основных конструкционных материалов модули упругости имеют порядок  $10^5 \div 10^6$  кгс/см<sup>2</sup>, а временное сопротивление порядка  $10^2 \div 10^3$  кгс/см<sup>2</sup>. Таким образом, максимальная относительная деформация имеет порядок  $10^{-3}$ . Отсюда следует, что, несмотря на значительные изменения формы оболочки, внутренняя метрика ее срединной поверхности практически не изменяется (изменение составляет величину порядка 0,1%). Деформация поверхности без изменения

ее внутренней метрики есть геометрическое изгибание. Деформация с малым изменением внутренней метрики естественно приводит к формам, близким к изометрическим преобразованиям.

Так как форма оболочки при значительной деформации близка к изометрическому преобразованию исходной поверхности, то в поисках решения вариационной задачи для функционала  $W=U-A$  естественно ограничиться рассмотрением форм, близких к изометрическим преобразованиям. Решение задачи облегчается еще благодаря некоторой специфике изометрических преобразований, вблизи которых находится искомая форма.

Дело в том, что срединная поверхность оболочки ввиду закрепления ее края обычно не допускает регулярных геометрических изгибаний. Как говорят, оболочка геометрически неизгибаема. Геометрически изгибаемая оболочка воспринимала бы действующую на нее нагрузку только за счет изгиба, а при малой толщине оболочки жесткость ее на изгиб ничтожна. Поэтому каждая грамотно сконструированная оболочка должна быть геометрически неизгибаемой. Поскольку срединная поверхность не допускает регулярных изгибаний, то изометрические преобразования, о которых шла речь выше, должны находиться в более широком классе поверхностей с нарушением регулярности вдоль линий. Наличие этих особенностей на изометрическом преобразовании и дает ключ к решению основной задачи.

Решение вариационной задачи для функционала  $W=U-A$  мы расчленим на два этапа. На первом этапе изометрическое преобразование фиксируется и функционал рассматривается на формах, близких к этому изометрическому преобразованию. Решение задачи на этом этапе удастся получить в замкнутом виде при самых общих предположениях о поверхности оболочки и ее изометрическом преобразовании. В результате решения этой задачи функционал  $W$  оказывается теперь определенным на изометрических преобразованиях, и общий вариационный принцип принимает геометрическую форму (принцип А, § 2). Найденное на втором этапе изометрическое преобразование, исправленное малой добавкой, полученной на первом этапе, и дает истинную форму оболочки при заданном нагружении.

Основная трудность при решении задачи на втором этапе состоит в определении возможных изометрических преобразований срединной поверхности, совместимых с

условиями закрепления. Качественные соображения о характере ожидаемых деформаций оболочки, подсказываемые опытом, часто облегчают решение этой задачи, сужая класс изометрических преобразований, на которых следует рассматривать функционал  $W$ . Что касается самого функционала, то он, будучи определенным на изометрических преобразованиях с нарушением регулярности вдоль линий, зависит от одной или нескольких функций, задающих форму этих линий на поверхности.

Описанный метод решения вариационной задачи для функционала  $W$  является на первом этапе приближенным. Именно поэтому и удастся получить решение на этом этапе в замкнутой форме. Однако, будучи приближенным, этот метод выгодно отличается от других методов тем, что даваемое им решение тем точнее, чем тоньше оболочка при заданных масштабах рассматриваемых деформаций, и оно становится точным, когда толщина оболочки неограниченно убывает. Если рассматривать вариационную задачу для функционала  $W$  как задачу с малым параметром (толщина оболочки), то получаемое нами решение представляет собой основное приближение к точному решению.

## 2. Осесимметрическая деформация сферической оболочки

Общие соображения, изложенные в п. 1, мы применим сначала для решения простой задачи об определении упругого состояния жестко закрепленной по краю оболочки в форме сферического сегмента под действием сосредоточенной силы  $f$ , приложенной в вершине (рис. 1). Будем предполагать деформацию сегмента при таком нагружении осесимметрической.

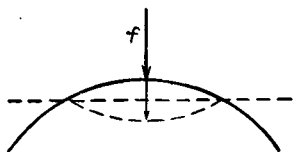


Рис. 1

Так как рассматриваемая деформация сегмента осесимметрическая, то деформированная поверхность является поверхностью вращения. Всякое изометрическое преобразование сегмента в поверхность вращения получается зеркальным отражением его части в некоторой плоскости, перпендикулярной оси, либо последовательным выполнением ряда таких отражений. В рассматриваемом варианте нагружения сегмента сосредоточенной силой соответствующее изометрическое преобразование получается, очевидно, одним зеркальным отражением (рис. 1, штриховая линия).



Так как упругое выпучивание сегмента под действием сосредоточенной силы  $f$  близко к некоторому зеркальному выпучиванию, то естественно искать истинную форму деформированного сегмента, варьируя это зеркальное выпучивание. При этом мы будем исходить из общего вариационного принципа, согласно которому для истинной формы сегмента под действием нагрузки  $f$  функционал  $W=U-A$  стационарен. Найдем выражение для энергии деформации  $U$  и производимой силой  $f$  работы  $A$ .

Очевидно, работу  $A$  можно вычислять просто по изометрическому преобразованию сегмента, полагая

$$A=f \cdot 2h,$$

где  $h$  — высота зеркально отражаемого сегмента. Что касается энергии деформации, то ее нельзя так просто выразить в зависимости от параметров изометрического преобразования. Дело в том, что изометрическое преобразование хорошо воспроизводит истинную форму оболочки в классе непрерывных поверхностей, но не отражает ее строения вблизи геометрического ребра (характер сглаживания ребра), а это существенно при определении энергии деформации.

Переход оболочки в деформированное состояние связан со значительным изгибом в плоскости меридиана, о чем свидетельствует наличие геометрического ребра на соответствующем изометрическом преобразовании. Этот изгиб сопровождается появлением значительных напряжений растяжения-сжатия в срединной поверхности в направлении параллели. Из наглядных соображений мы заключаем, что деформация сильного изгиба на границе выпучивания и соответствующие деформации срединной поверхности для достаточно тонких оболочек должны иметь местный характер.

Принимая во внимание изложенные выше соображения, мы разобьем поверхность сегмента на три области:  $G_{12}$  (окрестность ребра) и оставшиеся две области  $G_1$  и  $G_2$ , на которые эта окрестность разбивает всю поверхность. Для определенности будем считать область  $G_2$  внешней (прилегающей к краю сегмента). Вне окрестности ребра  $G_{12}$ , т. е. в областях  $G_1$  и  $G_2$ , энергию деформации оболочки можно вычислять обычным образом по изометрическому преобразованию.

В области  $G_2$  изменения нормальных кривизн  $\Delta k_1$  и  $\Delta k_2$  равны нулю. Поэтому

$$U(G_2)=0.$$

В области  $G_1$

$$\Delta k_1 = -\frac{2}{R}, \quad \Delta k_2 = -\frac{2}{R}.$$

Поэтому

$$U(G_1) = \frac{D}{2} \iint_{G_1} (\Delta k_1^2 + \Delta k_2^2 + 2\nu \Delta k_1 \Delta k_2) dS = \\ = \frac{E\delta^3}{3(1-\nu^2)} \frac{1}{R^2} S(G_1)(1+\nu),$$

где  $S(G_1)$  — площадь области  $G_1$ . При достаточно малой толщине оболочки зона  $G_{12}$  достаточно узкая и поэтому площадь области  $G_1$  можно считать равной площади  $S_1$  зеркально отражаемого сегмента. Тогда

$$U(G_1) \simeq \frac{E\delta^3}{3(1-\nu)} \frac{1}{R^2} S_1.$$

Обратимся теперь к энергии деформации в переходной зоне  $G_{12}$ . Рассмотрим сначала внешнюю полуокрестность ребра. Пусть  $u$  и  $v$  — радиальное и осевое смещения точки при варьировании изометрического преобразования в истинную форму оболочки. Относительная деформация растяжения-сжатия срединной поверхности вдоль параллели радиуса  $\rho$  будет

$$\varepsilon = \frac{2\pi(\rho+u) - 2\pi\rho}{2\pi\rho} = \frac{u}{\rho}.$$

Предполагая зону  $G_{12}$  достаточно узкой, можно считать

$$\varepsilon \simeq \frac{u}{r},$$

где  $r$  — радиус параллели вдоль ребра. Из наглядных соображений видно, что деформация растяжения-сжатия вдоль меридиана имеет подчиненное значение. Поэтому мы полагаем ее равной нулю. Таким образом, энергия деформации растяжения-сжатия во внешней полуокрестности ребра определяется по формуле

$$U = \frac{D'}{2} \iint \left(\frac{u}{r}\right)^2 d\sigma, \quad D' = \frac{E\delta}{2},$$

где интегрирование выполняется по площади внешней полуокрестности. Во внутренней полуокрестности ребра для энергии деформации растяжения-сжатия получается аналогичное выражение.

Рассмотрим теперь энергию деформации изгиба в переходной зоне  $G_{12}$ , связанную со спрямлением геометриче-

ского ребра. Начнем с внешней полуокрестности. Очевидно, главные изменения нормальных кривизн при рассматриваемой деформации происходят в направлении меридианов и параллелей поверхности. При достаточной пологости оболочки кривизна деформированного меридиана

$$\tilde{k}_1 \simeq \frac{1}{R} + v''.$$

Отсюда изменение кривизны при изгибе равно

$$\Delta k_1 = v''$$

(дифференцирование по дуге  $s$  меридиана).

Найдем кривизну деформированной оболочки вдоль параллели. Как известно, для поверхности вращения радиус нормальной кривизны в направлении параллели равен отрезку нормали между точкой поверхности и пересечением с осью. Отсюда для нормальной кривизны вблизи ребра получается выражение

$$\tilde{k}_2 = \frac{1}{R} \left( 1 + \frac{v'}{\alpha} \right),$$

где  $\alpha$  — угол, под которым пересекает исходный сегмент плоскость зеркального отражения. Так как нормальная кривизна исходной поверхности равна  $1/R$ , то интересующее нас изменение кривизны при деформации

$$\Delta k_2 = \frac{v'}{\alpha R}$$

(положительное направление отсчета  $v$  по внутренней нормали исходного сегмента в его центре).

Энергия деформации изгиба во внешней полуокрестности ребра равна

$$U = \frac{D}{2} \iint \left[ v''^2 + \left( \frac{v'}{\alpha R} \right)^2 + 2v'' \frac{v'}{\alpha R} \right] d\sigma, \quad D = \frac{E\delta^3}{12(1-\nu^2)},$$

где интегрирование выполняется по площади полуокрестности. Ввиду осевой симметрии деформации и малой ширины полуокрестности  $\bar{\varepsilon}$

$$U = \pi r D \int_0^{\bar{\varepsilon}} \left[ v''^2 + \left( \frac{v'}{\alpha R} \right)^2 + 2v'' \frac{v'}{\alpha R} \right] ds.$$

Среднее слагаемое подынтегрального выражения имеет подчиненное значение и поэтому может быть опущено.

Третье слагаемое без труда интегрируется. Отсюда, замечая, что  $v'(0) = -\alpha$ ,  $v'(\bar{s}) \simeq 0$ , получаем выражение для энергии изгиба в виде

$$U = \pi r D \int_0^{\bar{s}} v''^2 ds - \pi r D v \frac{\alpha}{R}.$$

Полная энергия деформации во внешней полуокрестности равна

$$U'' = \pi r D \int_0^{\bar{s}} v''^2 ds + \pi r D_1 \int_0^{\bar{s}} \frac{u^2}{r^2} ds - \pi r D v \frac{\alpha}{R}.$$

Обратимся теперь к энергии изгиба во внутренней полуокрестности ребра. Кривизна деформированной оболочки в направлении меридиана

$$\tilde{k}_1 = -\frac{1}{R} + v''.$$

Соответственно изменение кривизны по меридиану

$$\Delta k_1 = v'' - \frac{2}{R}.$$

Кривизна деформированной оболочки вдоль параллели

$$\tilde{k}_2 = -\frac{1}{R} \left( 1 + \frac{v'}{\alpha} \right).$$

Изменение кривизны

$$\Delta k_2 = -\frac{v'}{\alpha R} - \frac{2}{R}.$$

Подставляя эти значения  $\Delta k_1$  и  $\Delta k_2$  в формулу для энергии деформации изгиба и опуская члены, имеющие подчиненное значение, для внутренней полуокрестности ребра получим

$$U = \frac{D}{2} \iint \left[ v''^2 - \frac{4(1+\nu)}{R} v'' - 2\nu \frac{v'v'}{\alpha R} \right] d\sigma,$$

или после интегрирования

$$U = \pi r D \int_0^{\bar{s}} v''^2 ds - \frac{4(1+\nu) \pi r D \alpha}{R} + \pi r D v \frac{\alpha}{R}.$$

Полная энергия деформации оболочки во внутренней

полуокрестности равна

$$U' = \pi r D \int_0^{\bar{\varepsilon}} v'^2 ds + \pi r D_1 \int_0^{\bar{\varepsilon}} \frac{u^2}{r^2} ds - \frac{4(1+\nu)\pi r D \alpha}{R} + \pi r D \nu \frac{\alpha}{R}.$$

Как указано выше, истинная форма деформированной оболочки хорошо приближается изометрическим преобразованием вне окрестности ребра  $G_{12}$ . Переход от изометрического преобразования к истинной форме варьированием в области  $G_{12}$  не влияет на производимую внешней нагрузкой  $f$  работу  $A$ . Поэтому форма деформированной оболочки в области  $G_{12}$  естественно должна быть определена из условия минимума энергии деформации в этой области. Рассмотрим эту задачу сначала для внешней полуокрестности.

Для энергии деформации оболочки во внешней полуокрестности мы получили следующее выражение:

$$U'' = \pi r \left( D \int_0^{\bar{\varepsilon}} v'^2 ds + D' \int_0^{\bar{\varepsilon}} \frac{u^2}{r^2} ds \right).$$

Задача состоит в том, чтобы найти функции  $u$ ,  $v$ , сообщающие этому выражению минимальное значение. Из наглядных соображений о характере рассматриваемых деформаций для функций  $u$ ,  $v$  получаются следующие граничные условия:

$$1) v'(0) = -\alpha.$$

Это условие означает, что при сглаживании ребра деформацией  $u$ ,  $v$  касательные плоскости вдоль ребра переходят в горизонтальную плоскость (перпендикулярную оси оболочки).

$$2) u(0) = 0.$$

Это значит, что вдоль ребра радиальные смещения отсутствуют.

$$3) u(\bar{\varepsilon}) = 0, \quad v'(\bar{\varepsilon}) = 0.$$

Эти условия выражают локальный характер деформаций, спрямляющих ребро. При удалении от ребра деформации  $u$ ,  $v$  быстро затухают.

Имеется еще одно условие, которому подчинены функции  $u$ ,  $v$ . Это условие выражает равенство нулю относительных деформаций оболочки вдоль меридиана. Найдем его. Для исходной поверхности оболочки линейный

элемент меридиана

$$ds^2 = d\rho^2 + dz^2,$$

$\rho$  и  $z$  — цилиндрические координаты. У деформированной оболочки

$$ds^2 = (d\rho + du)^2 + (dz + dv)^2.$$

Отсюда

$$d\rho du + dz dv + \frac{1}{2} (du^2 + dv^2) = 0.$$

При малом  $\bar{\varepsilon}$

$$\left| \frac{dz}{d\rho} \right| \simeq \alpha, \quad u'^2 \ll |u'|.$$

Поэтому связь между функциями  $u$ ,  $v$ , задающими деформацию, можно записать в виде

$$u' + \alpha v' + \frac{1}{2} v'^2 = 0. \quad (*)$$

Итак, определение истинной формы оболочки вблизи ребра во внешней полуокрестности сводится к задаче на минимум для функционала  $U''$  при краевых условиях 1), 2), 3) и неголономной связи (\*).

Для внутренней полуокрестности ребра возникает аналогичная вариационная задача для функционала  $U'$  с теми же граничными условиями и неголономной связью для варьируемых функций. Заметим, что выражения  $U''$  и  $U'$  отличаются только слагаемым, не зависящим от варьируемых функций ( $v$ ,  $u$ ). Отсюда следует, что оба функционала  $U'$  и  $U''$  минимизируются одной и той же системой функций  $u(s)$ ,  $v(s)$ . В связи с этим можно ограничиться рассмотрением задачи о минимуме только для внешней полуокрестности, т. е. для функционала  $U''$ .

Исследуя вариационную задачу для функционала  $U''$ , удобно ввести безразмерные переменные. Положим

$$\bar{u} = \frac{u}{\varepsilon r \alpha^2}, \quad \bar{v} = \frac{v'}{\alpha}, \quad \bar{s} = \frac{s}{r\varepsilon}, \quad \varepsilon^4 = \frac{\delta^2}{12r^2\alpha^2}.$$

В новых переменных

$$U'' = \frac{\pi r E \delta^{5/2} \alpha^{5/2}}{12^{3/4} (1 - \nu^2)^{1/2} r^{1/2}} J,$$

где

$$J = \int_0^{\bar{\varepsilon}^*} (v'^2 + u^2) ds, \quad \bar{\varepsilon}^* = \frac{\bar{\varepsilon}}{r\varepsilon}.$$

Черта над обозначениями новых переменных опущена. Прежние краевые условия примут вид

$$u(0) = 0, \quad v(0) = -1, \quad u(\bar{\varepsilon}^*) = 0, \quad v(\bar{\varepsilon}^*) = 0.$$

Из выражения для  $\bar{\varepsilon}^*$  видно, что эта величина неограниченно возрастает с убыванием толщины оболочки  $\delta$ . В связи с этим для оболочек малой толщины при заданном масштабе общей деформации верхний предел в  $J$  можно взять равным  $+\infty$ , полагая, таким образом,

$$J = \int_0^{\infty} (v'^2 + u^2) ds.$$

Неголономная связь в безразмерных переменных принимает вид

$$u' + v + \frac{1}{2} v^2 = 0. \quad (**)$$

Теперь наша вариационная задача стала вполне определенной. Требуется определить функции  $u$ ,  $v$ , реализующие минимум функционала  $J$  при граничных условиях  $u(0)=0$ ,  $v(0)=-1$ ,  $u(\infty)=v(\infty)=0$  и неголономной связи (\*\*).

Если значение  $\min J$  подставить в выражение энергии деформации, то после суммирования отдельных слагаемых для энергии деформации всей оболочки, т. е. по всем областям  $G_1$ ,  $G_2$  и  $G_{12}$ , получается следующее простое выражение:

$$U = 2\pi r c E \delta^{5/2} \alpha^{5/2} \frac{1}{r^{1/2}},$$

$$\text{где } c = \frac{\min J}{12^{3/4} (1-v^2)}.$$

Предполагая достаточную пологость сегмента, можно считать

$$\alpha \simeq \frac{r}{R}, \quad 2h = \frac{r^2}{R}.$$

Подставляя эти значения в формулу для  $U$ , получим энергию деформации в зависимости от прогиба  $2h$  в центре сегмента:

$$U = 2\pi c E (2h)^{3/2} \delta^{5/2} \frac{1}{R}.$$

Теперь функционал  $W$ , к рассмотрению которого сводится наша задача, выглядит довольно просто:

$$W = 2\pi c E (2h)^{3/2} \delta^{5/2} \frac{1}{R} - 2hf.$$

Он представляет собой функцию одной варьируемой величины  $h$ . Из условия экстремума

$$\frac{dW}{dh} = 0$$

находим связь между действующей на оболочку силой  $f$  и прогибом, который она вызывает:

$$2h = \frac{R^2 f^2}{9\pi^2 c^2 E^2 \delta^6}.$$

Зная величину  $2h$ , находим зеркальное выпучивание, соответствующее упругой деформации под действием силы  $f$ . Функции  $u$ ,  $v$ , реализующие минимум функционала  $J$ , восстанавливают детали формы оболочки в переходной зоне  $G_{12}$ . В частности, через них определяются максимальные напряжения от местного изгиба на границе выпучивания и напряжения в срединной поверхности. Определение этих величин обычно составляет основной объем исследования упругого состояния оболочки.

Изложенное решение задачи об упругом состоянии сферического сегмента является, конечно, приближенным. По ходу этого решения мы сделали ряд упрощающих предположений, что и позволило нам получить окончательный результат в замкнутом виде. Наиболее существенным среди сделанных предположений является предположение о локальном характере деформации, которая спрямляет ребро при переходе от изометрического преобразования к истинной форме оболочки. Это предположение выполняется тем точнее, чем тоньше оболочка. В связи с этим можно утверждать, что полученное решение задачи будет сколь угодно близко к точному в отношении основных величин (максимальный прогиб, максимальные напряжения от изгиба и растяжения-сжатия в срединной поверхности), если оболочка достаточно тонкая, а рассматриваемые деформации значительны.

### 3. Решение вариационной задачи для функционала $J$

Рассмотрим вариационную задачу для функционала

$$J = \int_0^{\infty} (v'^2 + u^2) ds.$$

Эта задача нас интересует не только в связи с рассмотрением вопроса об упругом состоянии сферического сегмента



под действием сосредоточенной силы. Оказывается, эта вариационная задача возникает при исследовании упругих состояний общих выпуклых оболочек, которому будет посвящен следующий параграф.

Итак, рассматривается вариационная задача для функционала  $J$  при неголономной связи

$$u' + v + \frac{v^2}{2} = 0$$

и следующих граничных условиях для варьируемых функций:

$$u(0)=0, \quad v(0)=-1, \quad u(\infty)=v(\infty)=0.$$

Напомним, что переменные  $u$ ,  $v$  представляют собой соответственно нормированное радиальное смещение и угол поворота при переходе от изометрического преобразования сегмента к форме, которую он принимает при упругой деформации (рис. 2). Нормировка угла выполнена таким образом, что его значение в точке  $A$  ( $s=+0$ ) равно  $-1$ .

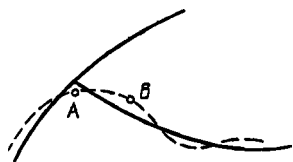


Рис. 2

Исходя из представления о локальном характере деформации оболочки в зоне сильного изгиба естественно предположить, что за точкой  $B$ , где  $v=0$ , величина  $v$  остается малой и в дифференциальной связи переменных  $u$ ,  $v$  членом  $v^2/2$  можно пренебречь. Тогда связь примет вид

$$u' + v = 0.$$

Далее, очевидно, что максимум изгиба деформированной оболочки должен достигаться в непосредственной близости от точки  $A$ . Отсюда следует, что вблизи точки  $A$  значение  $v'$ , определяющее изгиб, изменяется мало и естественно считать  $v'$  постоянной в некоторой окрестности точки  $A$ .

Принимая во внимание указанные два соображения, будем искать минимум функционала  $J$  на множестве функций  $u$ ,  $v$ , удовлетворяющих условиям

$$1) \text{ при } s \leq \sigma \quad u' + v + \frac{v^2}{2} = 0, \quad v' = \text{const};$$

$$2) \text{ при } s \geq \sigma \quad u' + v = 0.$$

Здесь  $\sigma$  — параметр, подлежащий варьированию. Минимум функционала  $J$  при заданном  $\sigma$  будет известной функцией

ей от  $\sigma$ :  $J_{\min} = J(\sigma)$ . Для определения величины  $J_0$  минимизируем эту функцию по  $\sigma$ :

$$J_0 = \min_{(\sigma)} J(\sigma).$$

Найдем функцию  $J(\sigma)$ . Полагая при  $s \leq \sigma$

$$v' = \frac{1}{\lambda} = \text{const},$$

после интегрирования получим

$$v = \frac{s}{\lambda} + \text{const}.$$

Так как  $v = -1$  при  $s = 0$ , то

$$v = \frac{s}{\lambda} - 1.$$

Параметр  $\lambda$  имеет простой смысл. Именно: это такое значение  $s$ , при котором  $v$  обращается в нуль, т. е.  $\lambda = \sigma$ . Таким образом, при  $s \leq \sigma$  имеем

$$v(s) = \frac{s - \sigma}{\sigma}.$$

Из уравнения

$$u' + v + \frac{v^2}{2} = 0$$

находим функцию  $u(s)$  при  $s \leq \sigma$ :

$$u = -\frac{1}{2\sigma}(s - \sigma)^2 - \frac{1}{6\sigma^2}(s - \sigma)^3 + \text{const}.$$

Постоянная интегрирования определяется краевым условием  $u(0) = 0$  и она равна  $\sigma/3$ . Таким образом, при  $s \leq \sigma$

$$u = -\frac{1}{2\sigma}(s - \sigma)^2 - \frac{1}{6\sigma^2}(s - \sigma)^3 + \frac{\sigma}{3}.$$

Значения функций  $u$ ,  $v$  на конце  $\sigma$  отрезка  $(0, \sigma)$  соответственно равны  $\sigma/3$  и  $0$ , и они представляют собой начальные значения для варьируемых функций  $u$ ,  $v$  на оставшейся части полуоси  $(\sigma, \infty)$ .

Так как при  $s \geq \sigma$  по предположению

$$u' + v = 0,$$

то функционал  $J$  можно представить в виде

$$J = \int_0^{\sigma} (v'^2 + u^2) ds + \int_{\sigma}^{\infty} (u''^2 + u^2) ds.$$

Функция  $u(s)$ , реализующая минимум функционала на полуоси  $(\sigma, \infty)$ , удовлетворяет уравнению Эйлера

$$u^{IV} + u = 0.$$

Его общее решение, исчезающее на бесконечности, допускает представление

$$u = c_1 e^{\omega_1 s} + c_2 e^{\omega_2 s},$$

где  $\omega_1$  и  $\omega_2$  — корни характеристического уравнения

$$\omega^4 + 1 = 0$$

с отрицательной вещественной частью, т. е.

$$\omega_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i), \quad \omega_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i).$$

Постоянные  $c_1$  и  $c_2$  определяются условиями сопряжения функций  $u$ ,  $v$  при  $s = \sigma$ . Имеем

$$u(\sigma) = c_1 e^{\omega_1 \sigma} + c_2 e^{\omega_2 \sigma} = \frac{\sigma}{3},$$

$$v(\sigma) = -u'(\sigma) = -c_1 \omega_1 e^{\omega_1 \sigma} - c_2 \omega_2 e^{\omega_2 \sigma} = 0.$$

Отсюда  $c_1 = -\frac{\sigma \omega_1}{3 \sqrt{2}} e^{-\omega_1 \sigma}$ ,  $c_2 = -\frac{\sigma \omega_2}{3 \sqrt{2}} e^{-\omega_2 \sigma}$ .

Вычислим теперь значение  $J(\sigma)$ . При  $s \leq \sigma$

$$v = \frac{s-\sigma}{\sigma}, \quad u = -\frac{1}{2\sigma}(s-\sigma)^2 - \frac{1}{6\sigma^2}(s-\sigma)^3 + \frac{\sigma}{3}.$$

Отсюда

$$\int_0^{\sigma} (v'^2 + u^2) ds = \frac{1}{\sigma} + \left( \frac{1}{20} + \frac{1}{7.36} \right) \sigma^3.$$

При  $s \geq \sigma$  имеем

$$u = -\frac{\sigma}{3 \sqrt{2}} (\omega_1 e^{\omega_1 (s-\sigma)} + \omega_2 e^{\omega_2 (s-\sigma)}),$$

$$v' = -\frac{\sigma i}{3 \sqrt{2}} (-\omega_1 e^{\omega_1 (s-\sigma)} + \omega_2 e^{\omega_2 (s-\sigma)}),$$

$$u^2 + v'^2 = \frac{2\sigma^2}{9} e^{-\sqrt{2}(s-\sigma)}.$$

Отсюда

$$\int_0^{\infty} (u^2 + v'^2) ds = \frac{2\sigma^2}{9 \sqrt{2}}.$$

Таким образом,

$$J(\sigma) = \frac{1}{\sigma} + \frac{\sqrt{2}}{9} \sigma^3 + \left( \frac{1}{20} + \frac{1}{7.36} \right) \sigma^3.$$

Минимизируя  $J(\sigma)$  по  $\sigma$ , находим  $J_0$ :

$$J_0 = \min_{(\sigma)} J(\sigma) \simeq 1,15.$$

Соответственно для постоянной  $c$  в выражении энергии деформации сферического сегмента получается значение  $c \simeq 0,19$ .

#### 4. Сопоставление теории с экспериментом

Для того чтобы выяснить, в какой мере геометрический подход к проблеме дает достоверные результаты, были поставлены два прецизионных эксперимента. В первом

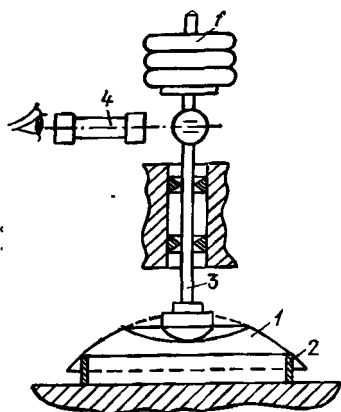


Рис. 3

определялась зависимость прогиба сферической оболочки в форме сферического сегмента под действием сосредоточенной силы [1], а во втором измерялась кривизна сегмента в зоне сильного изгиба также при сосредоточенном нагружении [2]. Установка для проведения первого эксперимента представлена на рис. 3.

Испытуемый сферический сегмент 1 свободно опирается на жесткое кольцо 2. Действие груза  $f$ , состоящего из калиброванных по весу шайб, через вертикальный стержень 3 передается на поверхность сегмента. Чтобы исключить пластические деформации сегмента в непосредственной близости точки приложения сосредоточенной силы, наконечник стержня, контактирующий с поверхностью сегмента, выполнен со сравнительно малой, но большей, чем у сегмента, кривизной. Вертикальные перемещения стержня, т. е. прогибы оболочки ( $2h$ ), регистрировались с помощью точного оптического прибора 4, позволяющего измерять эти перемещения с точностью до  $10^{-3}$  мм.

Эксперимент проводился на серии медных оболочек радиусом  $R=150$  мм с различной толщиной  $\delta$ : от 0,03

до 0,10 мм. Оболочки получались путем напыления меди в вакууме на стальную подложку сферической формы. Сферичность подложки, а следовательно, и получаемых оболочек, была выдержана с высокой (оптической) точностью. Специальные режимы напыления позволили получить образцы, обладающие высоким пределом упругости.

На рис. 4 представлены графики теоретической зависимости прогибов оболочки под действием сосредоточенной силы

$$2h = \frac{R^3}{9\pi^2 c^3 E^2 \delta^5} f^2$$

для сферических оболочек радиусом  $R=150$  мм и различных толщин  $\delta=0,037, 0,048$  и  $0,056$  мм. Графики построены с учетом фактического значения модуля упругости  $E$ , который определялся путем специального испытания на изгиб плоских образцов, получаемых напылением в сходных условиях.

Отдельные точки на графиках дают экспериментальные значения прогибов  $2h$  при различных значениях действующей силы  $f$ . Мы видим, что теория и опыт в рассматриваемом вопросе находятся в удовлетворительном соответствии.

В связи со вторым экспериментом заметим следующее. Изменение кривизны сегмента в зоне сильного изгиба в исходных переменных  $v$  и  $s$

$$\Delta k \approx v''.$$

При переходе к безразмерным переменным  $v$  и  $s$  получается

$$\Delta k = 12^{1/4} \frac{\alpha^{3/2}}{\rho^{1/2} \delta^{1/2}} v',$$

где  $\alpha$  и  $\rho$  имеют прежнее значение. Они показаны на

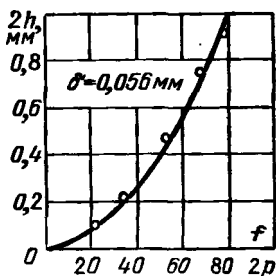
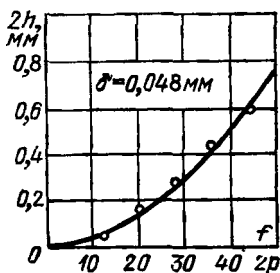
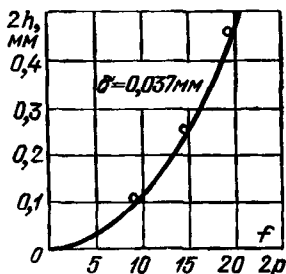


Рис. 4

рис. 5. Предполагая достаточную пологость сегмента, можно считать, что

$$\alpha = \frac{\rho}{R}, \quad 2h = \frac{\rho^2}{R}.$$

Поэтому для изменения кривизны  $\Delta k$  получается выражение

$$\Delta k = \frac{12^{1/4}}{R} \sqrt{\frac{2h}{\delta}} v'.$$

В зоне сильного изгиба  $v(s) = \frac{s-\sigma}{\sigma}$  (п. 3). Минимум функционала  $J(\sigma)$  получается при  $\sigma \approx 1,4$ . Поэтому в формулу для  $\Delta k$  надо подставить  $v' = 1/1,4$ . Таким образом, теоретическое значение

$$\Delta k \approx 1,3 \sqrt{\frac{2h}{\sigma} \frac{1}{R}}.$$

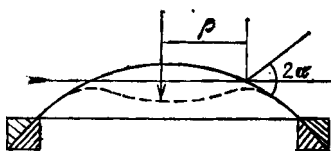


Рис. 5

эксперимента образцы получались также из меди напылением в вакууме на сферическую подложку радиусом  $R=100$  мм. Толщина образцов была от 0,03 до 0,05 мм. На поверхность образца наносилась тонкая риска толщиной порядка 1 мкм в плоскости меридионального сечения, проходящего через вершину сегмента.

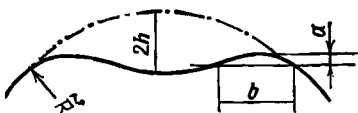


Рис. 6

Оболочка зажималась в специальной установке между двумя стальными кольцами притертыми по сферической поверхности с кривизной, равной кривизне оболочки. Деформация оболочки вызывалась сосредоточенным усилием от специального грибка со сферической головкой радиусом 60 мм, который перемещался с помощью микрометрического винта.

Установка с оболочкой жестко закреплялась на столе измерительного микроскопа так, что плоскость отмеченной рисккой нормального сечения была наклонена к плоскости стола под углом  $45^\circ$ . В поле зрения микроскопа наблюдалась нанесенная на поверхность оболочки риска и измерялись параметры ее деформации при выпучивании оболочки.

Под микроскопом замерялся прогиб  $2h$  в центре сегмента и хорда  $b$  при постоянном сдвиге  $a=50$  мкм (рис. 6).

Радиус кривизны  $\bar{R}$  определялся по формуле

$$\bar{R} = \frac{(b/2)^2}{2h\sqrt{2}}$$

(появление множителя  $\sqrt{2}$  связано с наклоном плоскости рассматриваемого сечения к плоскости стола). Величина  $\bar{R}$  определялась для прогибов  $2h=0,3 \div 0,7$  мм. Ввиду значительного изгиба оболочки экспериментальное значение изменения кривизны принималось равным  $1/\bar{R}$ .

При сопоставлении экспериментального и теоретического значения изменения кривизны  $\Delta k$  оказалось, что они достаточно близки и отличаются не более чем на 5 %.

## § 2. УПРУГИЕ СОСТОЯНИЯ ОБЩИХ ВЫПУКЛЫХ ОБОЛОЧЕК

### 1. Вариационный принцип $\Delta$ и его обоснование

Предметом нашего исследования будут упругие состояния оболочек, при которых форма деформированной поверхности оболочки существенно отличается от первоначальной. Такие упругие состояния возникают обычно в результате потери устойчивости оболочки, поэтому мы будем называть их закритическими. Мы будем предполагать, что характер закрепления оболочки по краю гарантирует ее геометрическую неизгибаемость, т. е. исключает изометрические преобразования ее срединной поверхности в классе регулярных (дважды дифференцируемых) поверхностей. Это условие обычно всегда выполнено.

Исследуя закритические упругие состояния оболочек, мы будем исходить из предположения о том, что упругая деформация оболочки, сопровождающаяся значительным изменением ее формы, близка к некоторому изометрическому преобразованию. Основанием для этой гипотезы является то, что основные конструкционные материалы, каковыми являются металлы и их сплавы, допускают незначительные упругие деформации. Поэтому оболочка из такого материала даже при значительном изменении ее формы при деформации испытывает незначительные изменения метрики срединной поверхности. Естественно, такая деформация близка к изометрическому преобразованию, при котором происходит изменение формы поверхности, но не меняется ее внутренняя метрика.

Так как срединная поверхность оболочки не допускает регулярных изометрических преобразований, то изометрическое приближение упруго деформируемой оболочки должно принадлежать более широкому классу кусочно-регулярных поверхностей. Соответствующие опыты дают основание для такого предположения.

Исследуя упругие состояния оболочки при закритических деформациях, мы будем исходить из общего вариаци-



ционного принципа, согласно которому истинная форма оболочки сообщает функционалу  $W=U-A$  стационарное значение. Ввиду близости истинной формы деформированной оболочки к некоторому ее изометрическому преобразованию мы будем искать эту форму на основе указанной близости. Итогом нашего исследования будет вариационный принцип  $\mathbb{A}$ , согласно которому изометрическое приближение истинной формы оболочки определяется из условия стационарности некоторого функционала  $\bar{W}$ , по смыслу сходного с  $W$ , но определенного уже только на изометрических преобразованиях формы срединной поверхности. Решение вариационной задачи для функционала  $\bar{W}$  дает ответ на основные вопросы, возникающие при исследовании закритического упругого состояния оболочки (максимальные прогибы, максимальные напряжения, характер устойчивости упругого равновесия и др.).

Пусть упругая оболочка  $F$  с регулярной поверхностью под действием некоторой нагрузки, которую уточнять не будем, испытывает закритическую деформацию, принимая форму  $\bar{F}$ . Если срединная поверхность оболочки геометрически неизгибаема в классе регулярных поверхностей, то деформированная оболочка  $\bar{F}$  близка к соответствующей форме  $\bar{F}$  изометрического преобразования  $\bar{F}$  с нарушением регулярности вдоль некоторых линий  $\bar{\gamma}$  и образованием ребер вдоль этих линий. Наличие особенностей в виде ребер на изометрическом преобразовании  $\bar{F}$  поверхности  $F$  и близость поверхности  $\bar{F}$  к  $\bar{F}$  дают основание говорить о ребрах (сглаженных ребрах) на деформированной поверхности оболочки  $\bar{F}$ . Разумеется, их форма и положение определены только в известном приближении, зависящем от близости деформированной оболочки  $\bar{F}$  к поверхности  $\bar{F}$ . Для того чтобы условным ребрам  $\bar{\gamma}$  на поверхности деформированной оболочки приписать определенную форму и положение, мы поступим следующим образом. Ребру  $\bar{\gamma}$  на поверхности  $\bar{F}$  по изометрии соответствует некоторая кривая  $\gamma$  на исходной поверхности  $F$ . При рассматриваемой деформации этой кривой на деформированной оболочке соответствует кривая  $\bar{\gamma}$ . Эту кривую естественно принять за условное ребро.

Наша ближайшая задача состоит в определении энергии упругой деформации при переходе от  $F$  к  $\bar{F}$ . Эту энер-

гию  $U$  представляется целесообразным разбить на две части  $U'$  и  $U''$ . Под  $U'$  мы будем понимать энергию деформации по основной поверхности оболочки вне окрестности ребер  $\bar{\gamma}$ , а под  $U''$  — энергию деформации внутри указанных окрестностей.

Относительно энергии  $U'$  мы будем предполагать, что она состоит в основном из энергии изгиба и, следовательно, на единицу площади поверхности она определяется по известной формуле

$$\bar{U}' = \frac{D}{2} (\Delta k_1^2 + \Delta k_2^2 + 2\nu \Delta k_1 \Delta k_2),$$

где  $D$  — жесткость оболочки на изгиб,  $\Delta k_1$  и  $\Delta k_2$  — главные изменения нормальных кривизн оболочки при ее деформации в форму  $\bar{F}$ . Ввиду того, что нарушение регулярности поверхности  $\bar{F}$  происходит только на ребрах  $\bar{\gamma}$ , можно считать, что поверхности  $\bar{F}$  и  $\bar{F}$  вне окрестности ребер не только точечно близки, но имеют также близкие нормальные кривизны по соответствующим направлениям. Отсюда следует, что в формуле для  $\bar{U}'$  величины  $\Delta k_1$  и  $\Delta k_2$  можно считать изменениями нормальных кривизн при переходе от поверхности  $F$  к изометрическому преобразованию  $\bar{F}$ .

Для того чтобы получить энергию  $U'$ , надо проинтегрировать выражение  $\bar{U}'$  по площади поверхности  $\bar{F}$ , исключая окрестности ребер. При этом если окрестности малы, как это мы и будем предполагать, то интегрирование можно распространить на всю поверхность  $\bar{F}$ . Поэтому

$$U' = \frac{D}{2} \iint_{\bar{F}} (\Delta k_1^2 + \Delta k_2^2 + 2\nu \Delta k_1 \Delta k_2) d\sigma.$$

Обратимся теперь к энергии деформации  $U''$  в окрестности ребер. Так же как в рассматриваемом примере сферической оболочки (§ 1), будем различать внешнюю и внутреннюю полуокрестности ребер и обозначим энергию деформации в этих окрестностях  $U'_i$  и  $U''_e$  соответственно. Начнем с рассмотрения внешней полуокрестности.

Пусть  $P$  — произвольная точка ребра  $\bar{\gamma}$  на поверхности  $\bar{F}$ . Ограничиваясь рассмотрением вблизи этой точки, введем цилиндрическую систему координат  $\varphi, r, z$ , приняв в качестве оси системы прямую, проходящую через центр

круга, соприкасающегося с кривой  $\bar{\gamma}$  в точке  $P$ , перпендикулярно плоскости этого круга. Выделим двумя радиальными плоскостями, близкими  $P$ , элемент оболочки из окрестности кривой  $\gamma$  и вычислим в нем энергию деформации (рис. 7). Из наглядных соображений о деформации

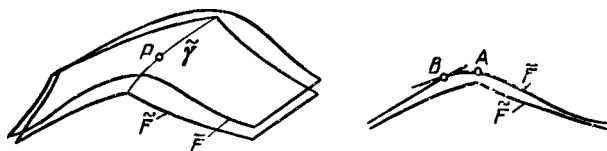


Рис. 7

оболочки в окрестности ребра мы заключаем, что энергия деформации выделенного элемента состоит в основном из энергии изгиба в плоскости, перпендикулярной ребру и энергии растяжения-сжатия в направлении ребра.

Пусть сечение поверхности  $\bar{F}$  плоскостью, перпендикулярной ребру в точке  $P$ , в координатах  $r, z$  задается уравнением

$$z = z(r).$$

Обозначим через  $u$  и  $v$  смещения точек поверхности  $\bar{F}$  при деформации ее в  $\bar{F}$ :  $u$  — по главной нормали, а  $v$  — по бинормали кривой  $\bar{\gamma}$  в точке  $P$ .

Определим изменение нормальных кривизн  $\Delta k_1$  и  $\Delta k_2$  при переходе от поверхности  $F$  к  $\bar{F}$  во внешней полуокрестности ребра. В связи с этим целесообразно ввести в рассмотрение поверхность вращения, соприкасающуюся с поверхностью  $\bar{F}$  в точке  $P$ . Спряmlение ребра на такой поверхности вблизи  $P$  будет, очевидно, сопровождаться такими же изменениями нормальных кривизн, как и для поверхности  $\bar{F}$ . Чтобы не вводить новых обозначений, предположим, что сама поверхность  $\bar{F}$  уже является поверхностью вращения.

Пусть  $k_e$  — нормальная кривизна поверхности  $\bar{F}$  в точке  $P$  в направлении, перпендикулярном ребру  $\bar{\gamma}$ , в сторону внешней полуокрестности. Тогда если касательные плоскости поверхности  $\bar{F}$  вдоль ребра  $\bar{\gamma}$  образуют малый угол, то нормальная кривизна поверхности  $\bar{F}$  в направлении, перпендикулярном ребру,

$$\bar{k}_1 = k_e + v''.$$

Соответственно для изменения нормальной кривизны при переходе от поверхности  $F$  к  $\bar{F}$  получается величина

$$\Delta k_1 = k_e - k + v'',$$

где  $k$  — нормальная кривизна исходной поверхности в соответствующем направлении. В случае, когда изометрическое преобразование сводится к зеркальному отражению, мы получим тот же результат, что и в разобранным примере (§ 1).

Найдем изменение нормальной кривизны в перпендикулярном направлении. Подобно тому, как в рассмотренном примере, для кривизны  $\bar{k}_2$  поверхности  $\bar{F}$  получается выражение

$$\bar{k}_2 = \bar{k}_v \left( 1 - \frac{v'}{\alpha} \right),$$

где  $\bar{k}_v$  — нормальная кривизна поверхности  $\bar{F}$  в направлении ребра, а  $\alpha$  — угол между соприкасающейся плоскостью ребра и касательными плоскостями поверхности  $\bar{F}$  в точке  $P$ . Кривизна  $k_2$  обращается в нуль на самом ребре, а вдали от ребра ввиду затухания деформаций, спрямляющих ребро ( $v' \rightarrow 0$ ), она такая же, как и у поверхности  $\bar{F}$ . Изменение кривизны при деформации поверхности  $F$  в  $\bar{F}$  равно

$$\Delta k_2 = \bar{k}_v \left( 1 - \frac{v'}{\alpha} \right) - k_v,$$

где  $k_v$  — нормальная кривизна исходной поверхности  $F$  в направлении, соответствующем ребру.

Зная изменение кривизн  $\Delta k_1$  и  $\Delta k_2$ , нетрудно записать выражение для энергии изгиба во внешней полуокрестности на единицу длины ребра:

$$U = \frac{D}{2} \int_0^{\bar{\epsilon}} (\Delta k_1^2 + \Delta k_2^2 + 2\nu \Delta k_1 \Delta k_2) ds,$$

где интегрирование выполняется по ширине  $\bar{\epsilon}$  внешней полуокрестности ребра. Ввиду того, что спрямление ребра сопровождается значительными деформациями изгиба в плоскости, перпендикулярной ребру, в подынтегральном выражении энергии деформации  $U$  естественно сохранить только члены, характеризующие этот изгиб, т. е. содержащие производную  $v''$ , и отбросить остальные члены, играющие подчиненную роль. При этом для энер-

гни изгиба получается выражение

$$U = \frac{D}{2} \int_0^{\bar{\varepsilon}} \left\{ v''^2 + 2v''(k_e - k) + 2vv'' \left[ \bar{k}_v \left( 1 - \frac{v'}{\alpha} \right) - k_v \right] \right\} ds.$$

Определим энергию растяжения-сжатия срединной поверхности во внешней полуокрестности ребра при рассматриваемой деформации. Прежде всего мы предполагаем, что спрямление ребра сопровождается появлением существенных деформаций только в направлении ребра. Деформацию срединной поверхности в сечениях, перпендикулярных ребру, мы полагаем равной нулю. Относительная деформация срединной поверхности в направлении ребра равна

$$\varepsilon = \frac{u}{\rho},$$

где  $\rho$  — радиус кривизны ребра  $\bar{\gamma}$  в точке  $P$ . Отсюда для энергии деформации растяжения-сжатия срединной поверхности на единицу длины ребра получаем выражение

$$U = \frac{D'}{2} \int_0^{\bar{\varepsilon}} \frac{u^2}{\rho^2} ds,$$

где  $D'$  — жесткость оболочки на растяжение-сжатие.

Полная энергия деформации оболочки во внешней полуокрестности ребра

$$U_e'' = \frac{D}{2} \int_0^{\bar{\varepsilon}} v''^2 ds + \frac{D'}{2} \int_0^{\bar{\varepsilon}} \frac{u^2}{\rho^2} ds + R,$$

$$R = \frac{D}{2} \int_0^{\bar{\varepsilon}} \left\{ 2v''(k_e - k) + 2vv'' \left[ \bar{k}_v \left( 1 - \frac{v'}{\alpha} \right) - k_v \right] \right\} ds.$$

По поводу слагаемого  $R$  выражения  $U_e''$  существенно заметить, что интегрирование в нем выполняется просто и, таким образом, зависит только от значений производной  $v'$  на границе полуокрестности, т. е. при  $s=0$  и  $s=\bar{\varepsilon}$ .

Обратимся теперь к энергии деформации во внутренней полуокрестности ребра. Она вычисляется точно так же, и для нее получается аналогичное выражение. Разница только в том, что соответствующие величины дополнитель-

ного члена берутся со стороны внутренней полуокрестности. В частности, вместо  $k_e$  будет  $k_i$  — нормальная кривизина поверхности  $\tilde{F}$  в направлении, перпендикулярном ребру со стороны внутренней полуокрестности. Что касается  $\tilde{k}_\nu$ , то эта величина относится к внутренней полуокрестности, но отличается только знаком от соответствующей величины внешней полуокрестности. Величины  $k$  и  $k_\nu$  относятся к исходной поверхности и поэтому сохраняют свое значение.

Поскольку мы игнорируем деформацию срединной поверхности в направлении, перпендикулярном ребру, то переменные  $u$ ,  $v$ , определяющие деформацию оболочки, должны удовлетворять некоторому условию. Это условие мы получим, приравнивая линейные элементы  $d\tilde{s}^2$  и  $d\bar{s}^2$  поверхностей  $\tilde{F}$  и  $\bar{F}$  в сечении, перпендикулярном ребру. Имеем

$$d\tilde{s}^2 = dr^2 + dz^2, \quad d\bar{s}^2 = (dr + du)^2 + (dz + dv)^2.$$

Отсюда

$$dr du + dz dv + \frac{1}{2}(du^2 + dv^2) = 0.$$

Обозначим через  $2\alpha$  угол между касательными плоскостями поверхности  $\tilde{F}$  вдоль ребра  $\tilde{\gamma}$ . Так как геодезические кривизны ребра  $\tilde{\gamma}$  на поверхности  $\tilde{F}$  отличаются только знаком при подходе к  $\tilde{\gamma}$  с двух сторон, то соприкасающаяся плоскость ребра образует с касательными плоскостями поверхности одинаковые углы, равные  $\alpha$ . В предположении малости угла  $\alpha$  соотношение между перемещениями  $u$ ,  $v$  можно упростить. Именно: замечая, что

$$\left| \frac{dz}{dr} \right| \simeq \alpha \text{ и } u'^2 \ll |u'|,$$

можем записать это соотношение в следующем виде:

$$u' + \alpha v' + \frac{1}{2}v'^2 = 0.$$

Мы предполагаем, что деформация  $(u, v)$ , спрямляющая ребро при переходе от изометрического преобразования  $\tilde{F}$  к истинной форме  $\bar{F}$ , быстро затухает при удалении от ребра. При этом, если вблизи ребра нет сосредоточенных нагрузок или близких к ним, варьирование формы оболочки вблизи ребра практически не влияет на слагаемое  $A$

функционала  $W$ . В связи с этим форма оболочки  $\bar{F}$  вблизи ребра определяется из условия минимума энергии деформации, спрямляющей ребро. Рассмотрим эту вариационную задачу сначала во внешней полукрестности ребра.

Вариационная задача для функционала  $U'_e$  содержит некоторую неопределенность. Именно: отсутствуют пока граничные условия для варьируемых функций  $u$ ,  $v$ , характеризующих деформацию, и не определена ширина  $\varepsilon$  области задания этих функций. Что касается граничных условий для функций  $u$ ,  $v$ , то они естественно вытекают из наглядных соображений о характере рассматриваемых деформаций. Именно: можно считать, что повороты касательных плоскостей при спрямлении ребра одинаковы по обе стороны и поэтому на ребре  $v'(0) = -\alpha$  (по соображениям удобства дифференцирование ведется по дуге  $s$  геодезической, перпендикулярной ребру, вместо дифференцирования по  $r$ ). Далее, можно считать, что радиальные смещения на ребре равны нулю, т. е.  $u(0) = 0$ . Наконец, вдали от ребра, на границе полукрестности, ввиду затухания деформаций  $u = 0$ ,  $v' = 0$ .

Для того чтобы устранить неопределенность, связанную с величиной  $\varepsilon$ , перейдем к безразмерным переменным  $\bar{u}$ ,  $\bar{v}$ ,  $\bar{s}$ , полагая

$$\bar{u} = \frac{u}{\varepsilon \rho \alpha^2}, \quad \bar{v} = \frac{v'}{\alpha}, \quad \bar{s} = \frac{s}{\rho \varepsilon},$$

где

$$\varepsilon^4 = \frac{\delta^2}{12\rho^2\alpha^2}.$$

Замечая, что

$$D = \frac{E\delta^3}{12(1-\nu^2)}, \quad D' = \frac{E\delta}{1-\nu^2},$$

для энергии деформации  $U'_e$  в новых переменных получим выражение

$$U'_e = \frac{E\delta^{5/2}\alpha^{5/2}J}{2 \cdot 12^{1/4}(1-\nu^2)\rho^{1/2}} + R,$$

где

$$J = \int_0^{\bar{\varepsilon}^*} (v'^2 + u^2) ds, \quad \bar{\varepsilon}^* = \frac{\bar{\varepsilon}}{\rho \varepsilon}.$$

Черта над обозначениями новых переменных для простоты записи опущена.

Связь между перемещениями в новых переменных принимает вид

$$u' + v + \frac{1}{2} v^2 = 0. \quad (*)$$

Предел интегрирования  $\bar{\varepsilon}^*$  зависит от параметра  $\varepsilon$ , причем когда  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,  $\bar{\varepsilon}^* \rightarrow \infty$ . В связи с этим, ограничиваясь случаем таких оболочек и их деформаций, для которых этот параметр мал, заменим верхний предел интегрирования  $\bar{\varepsilon}^*$  в  $J$  на  $\infty$ , приняв, таким образом,

$$J = \int_0^{\infty} (v'^2 + u^2) ds.$$

Теперь задача по определению функций  $u$ ,  $v$  и соответствующей энергии деформации сводится к задаче на минимум функционала  $J$  при неголономной связи (\*) для варьируемых функций и граничных условиях

$$v(0) = -1, \quad u(0) = 0, \quad v(\infty) = 0, \quad u(\infty) = 0.$$

Определение функций  $u$ ,  $v$ , задающих деформацию во внутренней полукрестности ребра, сводится к аналогичной вариационной задаче. Соответствующий функционал отличается только дополнительным членом  $R$ , в котором кривизны относятся к внутренней полукрестности. Поэтому если обозначить

$$\min J = J_0,$$

то энергия деформации, связанная со спрямлением ребра, запишется в виде

$$U'' = \frac{E\delta^{5/2} \alpha^{5/2} J_0}{12^{3/4} (1 - \nu^2) \rho^{1/2}} + D\alpha (k_e + k_t - 2k - 2\nu k_\nu).$$

Второе слагаемое выражения  $U''$  получается от дополнительных членов  $R$  энергии деформации во внутренней и внешней полукрестности ребра. Полная энергия деформации оболочки, связанная с переходом ее из исходной формы  $F$  в  $\bar{F}$ , равна

$$U = U' + U''.$$

Производимая внешней нагрузкой работа  $A$ , ввиду близости упругой деформации к изометрическому преобразованию, определяется с помощью последнего обычным



образом. В итоге получается, что оба слагаемых функционала  $W$  определены на изометрических преобразованиях исходной формы и поэтому общий вариационный принцип сводится к следующему вариационному принципу  $\mathbb{A}$ .

Значительная закритическая деформация упругой оболочки под действием данной нагрузки близка к той форме изометрического преобразования исходной поверхности, которая сообщает стационарное значение функционалу

$$W = U(\bar{F}) - A(\bar{F}).$$

Этот функционал определен на изометрических преобразованиях срединной поверхности оболочки. Слагаемое  $U(\bar{F})$  определяется следующей формулой:

$$U(\bar{F}) = \frac{E\delta^3}{24(1-\nu^2)} \iint_{\bar{F}} (\Delta k_1^2 + \Delta k_2^2 + 2\nu\Delta k_1 \Delta k_2) d\sigma + \\ + cE\delta^{5/2} \int_{\bar{\gamma}} \frac{\alpha^{5/2}}{\rho^{1/2}} ds_{\bar{\gamma}} + \frac{E\delta^3}{12(1-\nu^2)} \int_{\bar{\gamma}} \alpha (-2k - 2\nu k_{\bar{\gamma}} + k_e + k_i) d\delta_{\bar{\gamma}}.$$

Здесь  $\Delta k_1$  и  $\Delta k_2$  — главные изменения нормальных кривизн при переходе от исходной формы оболочки  $F$  к изометрическому преобразованию  $\bar{F}$ ,  $2\alpha$  — угол между касательными плоскостями поверхности  $\bar{F}$  вдоль ребра (ребер)  $\bar{\gamma}$ ,  $\rho$  — радиус кривизны кривой  $\bar{\gamma}$ ,  $k_{\bar{\gamma}}$  — нормальная кривизна поверхности  $F$  в направлении, соответствующем ребру  $\bar{\gamma}$ ,  $k_e$  и  $k_i$  — нормальные кривизны поверхности  $\bar{F}$  в направлении, перпендикулярном ребру  $\bar{\gamma}$ ,  $k$  — нормальная кривизна поверхности  $F$  в соответствующем направлении,  $\delta$  — толщина оболочки,  $E$  — модуль упругости,  $\nu$  — коэффициент Пуассона. Постоянная

$$c = \frac{J_0}{12^{3/4}(1-\nu^2)}.$$

Интегрирование в первом слагаемом выполняется по площади поверхности  $\bar{F}$ , а в остальных двух слагаемых — по дуге ребер  $\bar{\gamma}$ .

Слагаемое  $A(\bar{F})$  представляет собой производимую внешней нагрузкой работу при деформации оболочки в форму  $\bar{F}$  и вычисляется обычным образом.

Принцип  $\mathbb{A}$  определяет не только форму оболочки при закритической деформации, но также и максимальные напряжения в ее материале при этой деформации.

Действительно, максимальные напряжения возникают, очевидно, в окрестности ребра и обусловлены либо изгибом в плоскости, перпендикулярной ребру, либо растяжением (сжатием) срединной поверхности в перпендикулярном направлении. В исходных переменных  $u$ ,  $v$  для максимального напряжения от изгиба в плоскости, перпендикулярной ребру, имеем

$$\sigma' \simeq \frac{E\delta}{2} \max |v''|.$$

Максимальные напряжения растяжения (сжатия) срединной поверхности в направлении ребра

$$\sigma'' \simeq E \max \left| \frac{u}{\rho} \right|.$$

Переходя в этих формулах к безразмерным переменным  $u$ ,  $v$ , получим

$$\sigma' = c'E \frac{\delta^{1/2} \alpha^{3/2}}{\rho^{1/2}}, \quad \sigma'' = c''E \frac{\delta^{1/2} \alpha^{3/2}}{\rho^{1/2}},$$

где  $c'$  и  $c''$  — постоянные, определяемые с помощью функций  $u$ ,  $v$ , реализующих минимум функционала  $J$ , по формулам

$$c' = \frac{12^{1/4}}{2} \max |v'|, \quad c'' = \frac{\max |u|}{12^{1/4}}.$$

В § 1 была решена вариационная задача для функционала

$$J = \int_0^{\infty} (v'^2 + u^2) ds.$$

При этом было получено значение  $J_0 = \min J \simeq 1,15$ . Для функций  $v'(s)$  и  $u(s)$ , реализующих минимум функционала, получены выражения

$$v'(s) = \begin{cases} \frac{1}{\sigma} & \text{при } s \leq \sigma, \quad \sigma \simeq 1,4, \\ -\frac{\sigma i}{3\sqrt{\frac{\sigma}{2}}} (-e^{\omega_1(s-\sigma)} + e^{\omega_2(s-\sigma)}) & \text{при } s \geq \sigma, \end{cases}$$

$$\omega_1 = -\frac{1}{\sqrt{\frac{\sigma}{2}}} (1-i), \quad \omega_2 = -\frac{1}{\sqrt{\frac{\sigma}{2}}} (1+i),$$

$$u(s) = \begin{cases} -\frac{1}{2\sigma}(s-\sigma)^2 - \frac{1}{6\sigma^2}(s-\sigma)^3 + \frac{\sigma}{3} & \text{при } s \leq \sigma, \\ -\frac{\sigma}{3\sqrt{\frac{\sigma}{2}}} (\omega_1 e^{\omega_1(s-\sigma)} + \omega_2 e^{\omega_2(s-\sigma)}) & \text{при } s \geq \sigma. \end{cases}$$

Отсюда находим

$$\max |v'| \simeq 0,7, \quad \max |u| \simeq 0,5.$$

Соответственно

$$c' = \frac{12^{1/4}}{2} \max |v'| \simeq 0,65, \quad c'' = \frac{\max |u|}{12^{1/4}} \simeq 0,27.$$

**З а м е ч а н и е.** При выводе формулы для энергии деформации оболочки мы предполагали, что деформация оболочки в направлении, перпендикулярном ребру, равна нулю. Если заранее не вводить никаких ограничений, как это сделано в аналогичном выводе в работе [3], то ограничение появляется само собой в ходе решения вариационной задачи. И оно выражает не равенство нулю деформаций, а равенство нулю напряжений в направлении, перпендикулярном ребру. Впрочем, на выражение энергии деформации это влияет не существенно. Появляется только множитель  $\sqrt{1-v^2}$ , что при среднем значении  $v=0,3$  изменяет результат не более чем на 5%.

## 2. Изометрические преобразования выпуклых поверхностей с образованием ребер

В связи с применением вариационного принципа А к исследованию упругих состояний выпуклых оболочек нас будут интересовать изометрические преобразования выпуклых поверхностей с выпучиванием выпуклых областей и образованием ребер на их границе. Оказывается, такие изометрические преобразования допускают очень простое описание. Для полноты изложения напомним некоторые факты, относящиеся к изгибанию выпуклых поверхностей.

Пусть  $F$  — регулярная (по крайней мере дважды дифференцируемая) поверхность. Это значит, что на поверхности может быть введена криволинейная координатная сеть  $u, v$  так, что вектор-функция  $r(u, v)$ , задающая поверхность в этих координатах, является регулярной (по крайней мере дважды дифференцируемой) функцией. Линейным элементом поверхности, отвечающим данной параметризации  $u, v$ , называется дифференциальная квадратичная форма

$$ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2,$$

где

$$E = r_u^2, \quad F = r_u r_v, \quad G = r_v^2.$$

Поверхности, у которых при соответствующей параметризации  $u, v$  линейные элементы одинаковы, называются изометричными. Геометрически это означает, что существует соответствие точек этих поверхностей, при котором любые две соответствующие кривые на этих поверхностях имеют одинаковые длины. Указанное геометрическое свойство может быть принято за определение понятия изометрии. В таком виде оно имеет смысл и для нерегулярных поверхностей.

Если среди поверхностей данного класса каждая поверхность, изометричная  $F$ , равна  $F$ , то поверхность  $F$  называется однозначно определенной в этом классе. Например, любая замкнутая выпуклая поверхность (даже без предположения о регулярности) является однозначно определенной в классе выпуклых поверхностей [4].

Указание класса рассматриваемых поверхностей существенно. Одна и та же поверхность может быть однозначно определенной в одном классе поверхностей и в то же время не быть однозначно определенной в другом, более широком классе. Так, замкнутая выпуклая поверхность не является однозначно определенной в классе кусочно-выпуклых поверхностей.

Действительно, пусть  $F$  — замкнутая выпуклая поверхность. Проведем плоскость  $\alpha$ , пересекающую поверхность  $F$ , и отразим одну из ее частей, на которые она разбивается плоскостью  $\alpha$ , зеркально в этой плоскости (рис. 8). Замкнутая поверхность  $F^*$ , составленная из части  $S_2$  исходной поверхности и  $S_1^*$  — зеркального отражения  $S_1$  в плоскости  $\alpha$ , изометрична поверхности  $F$ . Изометрическое соответствие состоит в сопоставлении каждой точке  $P$  поверхности  $F$ , принадлежащей  $S_2$ , совпадающей с ней точки поверхности  $F^*$ , а точке  $P$ , принадлежащей  $S_1$ , — точке  $P^*$ , являющейся зеркальным изображением  $P$  в плоскости  $\alpha$ . Очевидно, такое отображение  $F$  на  $F^*$  является изометрическим. Но поверхности  $F$  и  $F^*$  заведомо не равны, ибо не существует такого движения или движения и зеркального отражения для всей поверхности (а не отдельных ее частей), которое совмещало бы ее с поверхностью  $F^*$ . Условимся называть рассмотренное изометри-

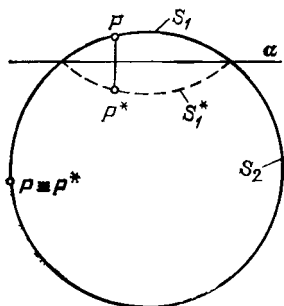


Рис. 8

чѣское преобразование поверхности  $F$  в  $F^*$  зеркальным выпучиванием.

Если  $F$  — данная поверхность и  $F'$  — поверхность, изометричная  $F$ , то говорят также, что  $F'$  получена геометрическим изгибанием (или просто изгибанием) из  $F$ . Иногда под изгибанием понимают непрерывную деформацию поверхности  $F$  в  $F'$  с сохранением изометрии в каждый момент деформации. Мы будем употреблять слово изгибание как в том, так и в другом смысле, уточняя его в тех случаях, когда это может привести к недоразумениям. Заметим, что в рассмотренном примере зеркального выпучивания выпуклой поверхности  $F$  поверхность  $F^*$  может быть получена непрерывным изгибанием из  $F$ . Для этого достаточно взять плоскость  $\alpha$ , сначала не пересекающую поверхность, и затем надвигать ее на поверхность, выполняя в каждом положении указанное построение с зеркальным отражением отсекаемой части.

В связи с предстоящими приложениями для нас особый интерес представляют изгибания строго выпуклых регулярных поверхностей с краем при условии неподвижности точек края и касательных плоскостей поверхности в этих точках. Для таких поверхностей мы прежде всего установим их однозначную определенность в классе дважды дифференцируемых поверхностей.

Пусть  $F$  — дважды дифференцируемая строго выпуклая поверхность с краем  $\gamma$ . Нетрудно дополнить ее до некоторой замкнутой выпуклой поверхности  $\Phi$ , например, взяв выпуклую оболочку поверхности  $F$ . Если бы поверхность  $F$  при указанном закреплении края  $\gamma$  допускала нетривиальное изометрическое преобразование в классе регулярных поверхностей, то замкнутая поверхность  $\Phi$ , очевидно, допускала бы изометрическое преобразование в классе выпуклых поверхностей. Но это невозможно в силу теоремы об однозначной определенности для таких поверхностей.

Как указано выше, поверхность  $F$ , будучи неизгибаемой в одном классе поверхностей, может быть изгибаема в более широком классе. В частности, регулярная, закрепленная по краю, строго выпуклая поверхность неизгибаема в классе регулярных поверхностей, но изгибаема в классе кусочно-регулярных поверхностей. В этом нас убеждает пример зеркального выпучивания. Здесь изометрическое преобразование связано с нарушением регулярности (образованием ребра) вдоль некоторой кривой, ограничивающей выпуклую область на поверхности. В свя-

зи с этим рассмотрим следующий вопрос. Каково наиболее общее изометрическое преобразование регулярной, закрепленной по краю, строго выпуклой поверхности в классе кусочно-регулярных поверхностей, если нарушение регулярности разрешается лишь вдоль заданной, априори не обязательно плоской, кривой  $\gamma$ , ограничивающей выпуклую область  $G$  на поверхности  $F$ ?

Пусть  $G'$  — часть поверхности  $F$ , расположенная вне области  $G$  и примыкающая к краю. Прежде всего, мы утверждаем, что при любом изометрическом преобразовании поверхности  $F$  с нарушением регулярности только вдоль кривой  $\gamma$  поверхность  $G'$  не изменяется, т. е.

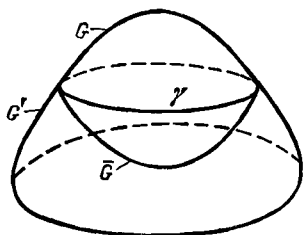


Рис. 9

точки ее остаются неподвижными. Это вытекает из единственности решения задачи Коши для дифференциального уравнения, к рассмотрению которого сводится задача о построении поверхности,

изометричной данной. Это уравнение Монжа — Ампера эллиптического типа. Закрепление края поверхности дает начальные условия для указанной задачи Коши. Неизменяемость области  $G'$  влечет за собой неизменяемость ее края  $\gamma$ . Таким образом, при изометрическом преобразовании поверхности  $F$  деформируется только часть  $G$ , причем  $\gamma$  — край области  $G$  — остается неподвижным. Пусть при изометрическом преобразовании  $F$  в  $\bar{F}$  ее часть  $G$  переходит в  $\bar{G}$ .

Если поверхность  $\bar{G}$  обращена выпуклостью в ту же сторону, что и  $G$ , то  $\bar{F}$  будет выпуклой поверхностью. Нетрудно заключить, что в этом случае она должна совпадать с  $F$ . Для этого достаточно воспользоваться рассуждением, с помощью которого установлена однозначная определенность  $F$  в классе регулярных поверхностей. Итак, если поверхность  $F$  допускает нетривиальное изометрическое преобразование, то надо считать, что  $\bar{G}$  обращена выпуклостью в другую сторону. При этом поверхности  $G$  и  $\bar{G}$ , имея общий край, составляют замкнутую выпуклую поверхность (рис. 9). Обозначим ее  $\Phi$ . Поверхность  $\Phi$  допускает изометрическое отображение на себя. Это отображение состоит в сопоставлении каждой точке  $P$  области  $G$  соответствующей по изометрии точки области  $\bar{G}$  и каждой

точке  $P$  области  $\bar{G}$  соответствующей по изометрии точки области  $G$ .

Ввиду однозначной определенности замкнутых выпуклых поверхностей построенное изометрическое отображение поверхности  $\Phi$  на себя должно сводиться к движению или к движению и зеркальному отражению. Так как точки кривой  $\gamma$  при изометрическом отображении остаются неподвижными, то дело сводится к зеркальному отражению поверхности  $\Phi$  относительно некоторой плоскости. Кривая  $\gamma$ , будучи неподвижной, должна лежать в этой плоскости. Таким образом, мы приходим к следующему выводу.

Изометрическое преобразование строго выпуклой регулярной поверхности, закрепленной по краю, в классе кусочно-регулярных поверхностей с нарушением регулярности только вдоль кривой  $\gamma$ , ограничивающей выпуклую область  $G$ , возможно только тогда, когда кривая  $\gamma$  плоская, и в этом случае оно сводится к зеркальному отражению области  $G$  в плоскости кривой  $\gamma$ .

### 3. Энергия деформации выпуклой оболочки при зеркальном выпучивании

Применение принципа А при изучении закритических упругих состояний оболочки предполагает определение ряда величин изометрического преобразования срединной поверхности. Имея в виду ближайшие приложения, мы определим такие величины в случае зеркального выпучивания малых областей.

Как известно, форма регулярной строго выпуклой поверхности в достаточно малой окрестности данной точки  $P$  хорошо приближается некоторым эллиптическим параболоидом, который называется соприкасающимся. Если принять касательную плоскость в точке  $P$  за плоскость  $xy$ , а главные направления поверхности в этой точке — за направления координатных осей, то уравнение соприкасающегося параболоида будет иметь вид

$$z = \frac{1}{2}(k_1x^2 + k_2y^2),$$

где  $k_1$  и  $k_2$  — главные кривизны поверхности в точке  $P$ . Отсюда следует, что область зеркального выпучивания оболочки с центром выпучивания  $P$  при малой высоте выпучивания  $2h$  (прогиб в точке  $P$ ) задается неравенством

$$\frac{1}{2}(k_1x^2 + k_2y^2) \leq h$$

и, следовательно, представляет собой эллипс с полуосями

$$a = \sqrt{\frac{2h}{k_1}}, \quad b = \sqrt{\frac{2h}{k_2}}.$$

В связи с определением энергии упругой деформации при выпучивании нам понадобятся выражения для кривизны кривой, ограничивающей область выпучивания, и для нормальной кривизны поверхности. Найдем выражения для этих величин.

Граница выпучивания, как эллипс с полуосями  $a$ ,  $b$ , допускает параметрическое задание

$$x = a \cos t, \quad y = b \sin t.$$

Пользуясь формулой для кривизны кривой, находим

$$\frac{1}{\rho} = \frac{ab}{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{3/2}},$$

где  $\rho$  — радиус кривизны.

Определим нормальную кривизну поверхности в направлении границы выпучивания. Ввиду того, что область выпучивания мала, можно считать, что главные кривизны на границе выпучивания близки к  $k_1$  и  $k_2$  — главным кривизнам в  $P$  (центре выпучивания), а главные направления близки к главным направлениям в  $P$ .

По формуле Эйлера нормальная кривизна в направлении, которое образует угол  $\theta$  с главным направлением, отвечающим кривизне  $k_1$ , равна

$$k_\theta = k_1 \cos^2 \theta + k_2 \sin^2 \theta.$$

В рассматриваемом случае

$$\cos \theta = \frac{-a \sin t}{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{1/2}}, \quad \sin \theta = \frac{b \cos t}{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{1/2}}.$$

Поэтому нормальная кривизна поверхности в направлении границы выпучивания равна

$$k_n = k_1 \frac{a^2 \sin^2 t}{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} + k_2 \frac{b^2 \cos^2 t}{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}$$

или, замечая, что

$$k_1 = \frac{2h}{a^2}, \quad k_2 = \frac{2h}{b^2},$$

получим

$$k_n = \frac{2h}{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}.$$



Нормальная кривизна в направлении, перпендикулярном границе выпучивания, равна

$$\bar{k}_n = k_1 \sin^2 \theta + k_2 \cos^2 \theta,$$

или, принимая во внимание выражения для  $\cos \theta$ ,  $\sin \theta$ ,  $k_1$  и  $k_2$ , получим

$$\bar{k}_n = 2h \frac{\frac{a^2}{b^2} \sin^2 t + \frac{b^2}{a^2} \cos^2 t}{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}.$$

Определим угол  $\alpha$  между плоскостью кривой  $\gamma$ , ограничивающей область выпучивания, и касательными плоскостями поверхности. По формуле Менье

$$\rho k_n = \sin \alpha.$$

Для малых областей выпучивания и, следовательно, малых  $\alpha$  имеем

$$\alpha = \rho k_n.$$

Подставляя сюда найденные значения  $\rho$  и  $k_n$ , получим

$$\alpha = \frac{2h}{ab} (a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{1/2}.$$

Вычислим теперь  $U$  — энергию деформации оболочки. Она у нас состоит из двух частей:  $U_G$  и  $U_\gamma$ , где  $U_G$  — энергия изгиба по основной поверхности, а  $U_\gamma$  — энергия деформации в окрестности границы  $\gamma$  области выпучивания. Величина  $U_G$  определяется по формуле

$$U_G = \frac{D}{2} \iint (\Delta k_1^2 + \Delta k_2^2 + 2\nu \Delta k_1 \Delta k_2) d\sigma.$$

Здесь  $\Delta k_1$  и  $\Delta k_2$  — главные изменения нормальных кривизн при переходе от исходной формы к изометрическому преобразованию,

$$D = \frac{E\delta^3}{12(1-\nu^2)}$$

— жесткость оболочки на изгиб, а интегрирование выполняется по площади всей поверхности. В рассматриваемом случае зеркального выпучивания величины  $\Delta k_1$  и  $\Delta k_2$  вне области выпучивания  $G$  равны нулю, а внутри этой области  $\Delta k_1 = 2k_1$ ,  $\Delta k_2 = 2k_2$ , где  $k_1$  и  $k_2$  — главные кривизны. Ввиду предположения о малости области выпучивания  $k_1$  и  $k_2$  можно считать равными их значениям в центре выпучивания  $P$ . С учетом величины площади области

выпучивания получим

$$U_G = \frac{\pi h}{3\sqrt{k_1 k_2}} \frac{E\delta^3}{1-\nu^2} (k_1^2 + k_2^2 + 2\nu k_1 k_2).$$

Здесь  $2h$ —высота выпучивания (нормальный прогиб в центре выпучивания),  $k_1$  и  $k_2$ —главные кривизны в  $P$ ,  $\delta$ —толщина оболочки,  $E$ —модуль упругости, а  $\nu$ —коэффициент Пуассона.

Вычислим теперь энергию деформации на  $\gamma$ —границе выпучивания. Для нее была получена формула

$$U_\gamma = cE\delta^{5/2} \int_\gamma \frac{\alpha^{5/2}}{\rho^{1/2}} ds_\gamma + \frac{E\delta^3}{12(1-\nu^2)} \int_\gamma \alpha (-2k - 2\nu k_\gamma + k_e + k_i) ds_\gamma.$$

Здесь  $\alpha$ —угол между плоскостью кривой  $\gamma$  и касательными плоскостями деформированной поверхности,  $k$ —нормальная кривизна исходной поверхности в направлении, перпендикулярном границе выпучивания,  $k_\gamma$ —нормальная кривизна в направлении границы,  $k_e$  и  $k_i$ —нормальные кривизны изометрически преобразованной поверхности соответственно со стороны внутренней и внешней окрестности границы выпучивания.

В случае зеркального выпучивания  $k_e = k$ ,  $k_i = -k$ . Таким образом, второе слагаемое в формуле для  $U_\gamma$  можно записать в виде  $-\frac{E\delta^3}{6(1-\nu^2)} \int_\gamma (k + \nu k_\gamma) ds_\gamma$ . Принимая во

внимание полученные выше значения для нормальной кривизны  $k_\gamma$ ,  $k = k_n$ , угла  $\alpha$  и замечая, что  $ds_\gamma = (a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{1/2} dt$ , будем иметь

$$\begin{aligned} \int_\gamma (k + \nu k_\gamma) \alpha ds_\gamma &= \frac{4h^2}{ab} \int_0^{2\pi} \left( \frac{a^2}{b^2} \sin^2 t + \frac{b^2}{a^2} \cos^2 t + \nu \right) dt = \\ &= \frac{4\pi h^2}{ab} \left( \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} + 2\nu \right). \end{aligned}$$

Таким образом, второе слагаемое в выражении для  $U_\gamma$  равно

$$-\frac{E\delta^3 \pi h}{3\sqrt{k_1 k_2} (1-\nu^2)} (k_1^2 + k_2^2 + 2\nu k_1 k_2).$$

Оно отличается от выражения  $U_G$  только знаком.

Определим максимальные напряжения  $\sigma$  в материале оболочки при выпучивании. Такие напряжения возникают от изгиба на границе выпучивания и определяются по

формуле (п. 1)

$$\sigma = c'E \frac{\delta^{1/2} \alpha^{3/2}}{\rho^{1/2}}:$$

Подставляя сюда значения  $\alpha$  и  $\rho$ , получим

$$\sigma = c'E \delta^{1/2} (2h)^{1/2} \sqrt{k_1 k_2}.$$

Существенно заметить, что эти напряжения постоянны вдоль границы выпучивания.

Итак, при зеркальном выпучивании малой области строго выпуклой оболочки энергия деформации  $U$  определяется по формуле

$$U = \pi c E \delta^{5/2} (2h)^{3/2} (k_1 + k_2), \quad c \simeq 0,19.$$

Максимальные, возникающие от изгиба на границе выпучивания напряжения равны

$$\sigma = c'E \delta^{1/2} (2h)^{1/2} \sqrt{k_1 k_2}, \quad c' \simeq 0,65.$$

В качестве иллюстрации применения вариационного принципа А рассмотрим упругую деформацию произвольной выпуклой оболочки под действием сосредоточенной силы.

Пусть строго выпуклая оболочка, жестко закрепленная по краю, находится под действием сосредоточенной силы  $f$ , нормальной к поверхности оболочки в точке приложения. Если эта сила вызывает значительную деформацию, то определение упругого состояния оболочки сводится к задаче на экстремум функционала  $W = U - A$ , который определен и рассматривается на изометрических преобразованиях исходной формы оболочки. Мы будем предполагать, что выпучивание оболочки, вызванное действием силы  $f$ , охватывает выпуклую область. В этом случае, как показано в п. 2, класс изометрических преобразований, на которых надо рассматривать нашу вариационную задачу, сужается до зеркального выпучивания.

В случае зеркального выпучивания для функционала  $U$  получено следующее выражение:

$$U = \pi c E \delta^{5/2} (2h)^{3/2} (k_1 + k_2).$$

Предполагая, что точка приложения силы  $f$  является центром выпучивания, будем иметь для функционала  $A$ , представляющего собой работу, производимую силой  $f$  при деформации оболочки, формулу  $A = 2fh$ .

Из условия стационарности  $d(U - A) = 0$  функционала  $W$  получаем зависимость между действующей силой  $f$

и деформацией ( $2h$ ), которую она вызывает. Имеем

$$dW = 3\pi c E \delta^{5/2} (2h)^{1/2} (k_1 + k_2) dh - 2f dh = 0.$$

Отсюда

$$f = \frac{3\pi c}{2} E \delta^{5/2} (k_1 + k_2) \sqrt{2h}.$$

Из этой формулы видно, что при увеличении деформации воспринимаемая оболочкой нагрузка  $f$  растет. Это указывает на устойчивость состояний равновесия оболочки под действием сосредоточенной нагрузки.

К выводу об устойчивости состояний равновесия можно прийти и другим путем, рассматривая вторую вариацию функционала  $W$ . Имеем

$$d^2W = 3\pi c E \delta^{5/2} (k_1 + k_2) \frac{1}{\sqrt{2h}} dh^2 > 0.$$

А это значит, что состояние равновесия устойчиво.

Рассмотрим особо случай сферической оболочки. Для сферической оболочки радиуса  $R$  имеем  $k_1 = k_2 = 1/R$ , и формула, устанавливающая зависимость между действующей силой  $f$  и прогибом  $2h$ , который она вызывает, принимает вид

$$f = 3\pi c E \delta^{5/2} \sqrt{2h} \frac{1}{R}.$$

Если радиус круга выпучивания обозначить через  $\rho$  и заметить, что  $2h \simeq \rho^2/R$ , то эту зависимость можно еще записать так:

$$f = 3\pi c E \frac{\delta^{5/2}}{R^{3/2}} \rho.$$

Таким образом, зависимость радиуса круга выпучивания от действующей силы  $f$  является линейной.

#### **4. Закритические упругие состояния выпуклой оболочки при нагружении внешним давлением**

Опыт показывает, что выпуклая оболочка, закрепленная по краю, при нагружении внешним давлением теряет устойчивость, когда давление достигает некоторого критического значения. Рассмотрим упругие состояния оболочки, возникающие в результате потери устойчивости. Согласно вариационному принципу А, определение этих состояний сводится к решению задачи на экстремум для функционала  $W = U - A$  на изометрических преобразова-

ниях исходной формы оболочки. Будем предполагать область выпучивания выпуклой и относительно малой. В этом случае изометрическое преобразование является зеркальным выпучиванием и энергия деформации оболочки определяется по формуле

$$U = \pi c E (2h)^{3/2} \delta^{5/2} (k_1 + k_2),$$

где  $2h$  — высота выпучивания в центре области,  $k_1$  и  $k_2$  — главные кривизны срединной поверхности,  $\delta$  — толщина оболочки,  $E$  — модуль упругости, а постоянная  $c \approx 0,19$ . Определим производимую внешним давлением  $p$  работу  $A$ . Она равна произведению давления на изменение (при деформации) объема, ограничиваемого оболочкой, т. е.

$$A = p \Delta V.$$

Найдем  $\Delta V$ . Приняв центр выпучивания  $P$  за начало координат, а касательную плоскость в  $P$  за плоскость  $xy$ , при соответствующем направлении осей  $x$ ,  $y$  можем задать поверхность оболочки вблизи  $P$  уравнением

$$z = \frac{1}{2} (k_1 x^2 + k_2 y^2).$$

Если обозначить через  $S(z)$  площадь области, определяемой неравенством

$$\frac{1}{2} (k_1 x^2 + k_2 y^2) \leq z,$$

то интересующий нас объем

$$\Delta V = 2 \int_0^h S(z) dz.$$

Площадь  $S(z)$ , как площадь эллипса с полуосями

$$a = \sqrt{\frac{2z}{k_1}}, \quad b = \sqrt{\frac{2z}{k_2}},$$

равна  $\pi ab$ , и, следовательно,

$$S(z) = \pi \frac{2z}{\sqrt{k_1 k_2}}.$$

Отсюда после интегрирования по  $z$  получаем объем

$$\Delta V = \frac{2\pi h^3}{\sqrt{k_1 k_2}}.$$

Производимая внешним давлением  $p$  работа равна

$$A = \frac{2\pi h^3 p}{\sqrt{k_1 k_2}}.$$

Теперь из условия стационарности функционала  $W$  в состоянии упругого равновесия оболочки находим зависимость воспринимаемого оболочкой давления  $p$  от прогиба  $2h$  в центре выпучивания. Имеем

$$dW = 3\pi cE (2h)^{1/2} \delta^{5/2} (k_1 + k_2) dh - \frac{4\pi h p}{\sqrt{k_1 k_2}} dh = 0,$$

откуда

$$p = \frac{3}{2} cE (k_1 + k_2) \sqrt{k_1 k_2} \frac{\delta^{5/2}}{\sqrt{2h}}.$$

Из этой формулы видно, что воспринимаемое оболочкой давление уменьшается при увеличении деформации ( $2h$ ). А это указывает на неустойчивость закритических деформаций под внешним давлением. Заключение о неустойчивости найденных упругих состояний соответствует экспериментальным данным о характере закритических деформаций под внешним давлением. Согласно этим данным, закритические деформации после потери устойчивости оболочки развиваются без увеличения нагрузки и даже при ее уменьшении.

В случае сферической оболочки зависимость между давлением и прогибом оболочки —

$$p = 3cE \left( \frac{\delta}{R} \right)^2 \sqrt{\frac{\delta}{2h}}.$$

Наименьшая воспринимаемая оболочкой нагрузка при закритической деформации называется нижней критической в отличие от верхней критической нагрузки, при которой происходит потеря устойчивости. Рассмотрим вопрос о величине нижней критической нагрузки для строго выпуклых оболочек, находящихся под внешним давлением. Ввиду того, что воспринимаемая оболочкой нагрузка уменьшается при увеличении деформации, нижняя критическая нагрузка соответствует наибольшей геометрически допустимой деформации. Если эту деформацию обозначить  $2h_i$ , то нижняя критическая нагрузка  $p_i$  будет определяться по формуле

$$p_i = \frac{3}{2} cE (k_1 + k_2) \sqrt{k_1 k_2} \frac{\delta^{5/2}}{\sqrt{2h_i}}.$$

В частности, для сферической оболочки в форме сегмента с радиусом кривизны  $R$  и высотой  $h_0$

$$p_i = 3cE \left( \frac{\delta}{R} \right)^2 \sqrt{\frac{\delta}{2h_0}}.$$

К сожалению, формула для энергии деформации выведена в предположении, что граница выпучивания находится вдали от края оболочки. Для деформаций, при которых граница выпучивания приближается к краю оболочки, коэффициент  $c$  в формуле для энергии деформации зависит от расстояния до края. Если учесть эту зависимость, как это сделано в книге [1], то для сферической оболочки в форме сегмента получается уточненная формула:

$$p_t = \frac{3c \sqrt{\frac{\delta}{2h_0}}}{1 - 1,85 \sqrt{\frac{\delta}{2h_0}}} E \left( \frac{\delta}{R} \right)^2.$$

Если сферический сегмент характеризовать радиусом кривизны  $R$  и радиусом основания  $r$ , то формула принимает вид

$$p_t = \frac{3c \sqrt{\frac{\delta R}{r^2}}}{1 - 1,85 \sqrt{\frac{\delta R}{r^2}}} E \left( \frac{\delta}{R} \right)^2.$$

Нижняя критическая нагрузка для пологих сферических сегментов была подвергнута экспериментальному исследованию. Соответствующий эксперимент состоял в следующем.

Внутри массивного цилиндрического сосуда 1 (рис. 10), закрытого сверху испытуемой сферической оболочкой 2, с помощью микрометрического винта подавался поршень 3. При этом в жидкости, заполняющей сосуд, нарастало давление, которое регистрировалось определенным устройством. Достигнув критического значения, давление начинало уменьшаться и снижалось до некоторого минимума, после чего снова увеличивалось. Максимальное давление отвечает моменту потери устойчивости оболочки и является верхним критическим давлением. А минимум давления соответствует нижней критической нагрузке, как мы ее определили.

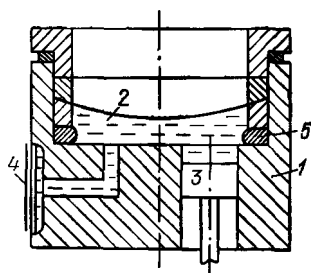


Рис. 10

Отметим некоторые особенности конструкции экспериментальной установки и работы на ней. Прежде всего мы стремились избежать резкого «хлопка», которым обычно

сопровождается потеря устойчивости оболочки в экспериментах такого рода. В связи с этим все упругие элементы конструкции были сделаны «максимально жесткими». Именно поэтому в качестве среды, заполняющей сосуд и сообщающей давление на оболочку, была взята жидкость, а сам сосуд выполнен достаточно массивным, с толстыми стенками. Давление регистрировалось при помощи весьма чувствительного тензометрического датчика 4, укрепленного на поверхности сосуда. В результате всех указанных мер давление после «хлопка» не снижалось до минимума и достигало этого минимума только при дальнейшем продвижении поршня внутрь сосуда. Это важно для оболочек с ограниченной упругостью, которые после энергичного «хлопка» могут показать даже отрицательное нижнее критическое давление.

Испытуемый сегмент был зажат между двумя стальными кольцами, из которых нижнее опиралось на резиновую прокладку 5, а верхнее прижималось фланцем. Условия

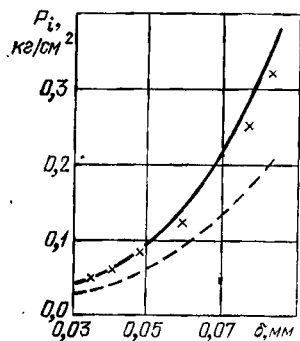


Рис. 11

зашемления сегмента по краю, близкие к идеальным, обеспечивались притиркой колец по соответствующим сферическим поверхностям и равномерностью давления колец благодаря эластичности прокладки 5.

Четыре тензометрических датчика 4, расположенные на боковой поверхности сосуда, — два по окружности, а два другие в осевом направлении — были соединены обычным способом в мостиковую схему, которая подключалась к источнику питания и гальванометру.

Показания гальванометра предварительно тарировались.

Испытанию подвергались медные сферические сегменты, полученные напылением в вакууме. Радиус кривизны сегментов  $R=80$  мм, а толщина  $\delta$  изменялась в пределах от 0,03 до 0,09 мм. Внутренний диаметр колец  $2r$ , зажимающих испытуемые сегменты, равнялся  $2r=16$  мм.

На рис. 11 штриховой линией изображена зависимость нижнего критического давления  $p_i$ , даваемого формулой

$$p_i = 3cE \left( \frac{\delta}{R} \right)^2 \sqrt{\frac{\delta R}{r^2}},$$

от толщины оболочки  $\delta$ . Жирной линией изображена



зависимость  $p_i(\delta)$  по уточненной формуле

$$p_i = \frac{3c \sqrt{\frac{\delta R}{r^2}}}{1 - 1,85 \sqrt{\frac{\delta R}{r^2}}} E \left( \frac{\delta}{R} \right)^2.$$

Отдельные точки, отмеченные крестиками, дают значения нижнего критического давления, полученные в эксперименте.

### § 3. ЗАКРИТИЧЕСКИЕ УПРУГИЕ СОСТОЯНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПРИ ОСЕВОМ СЖАТИИ

#### 1. Специальные изометрические преобразования цилиндрической поверхности

Согласно вариационному принципу А, исследование закритических упругих состояний оболочек сводится к рассмотрению вариационной задачи для функционала  $W$ , определенного на изометрических преобразованиях исходной формы. Имея в виду эту задачу для цилиндрических оболочек, мы рассмотрим сначала изометрические преобразования цилиндрических поверхностей.

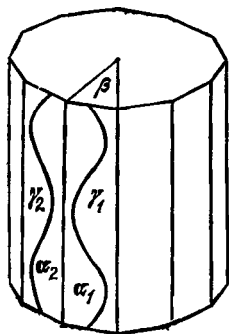


Рис. 12

Опыт показывает, что закритическая деформация геометрически совершенной цилиндрической оболочки при осевом сжатии обладает определенной правильностью строения. Именно: наблюдается отчетливая периодичность формы деформированной поверхности в окружном направлении. В связи с этим мы рассмотрим изометрические преобразования цилиндрической поверхности, обладающие указанной правильностью строения.

Возьмем правильную призму с четным числом сторон ( $2n$ ) и проведем на одной из ее боковых граней  $\alpha_1$  произвольную гладкую кривую  $\gamma_1$ , однозначно проектирующуюся на ось призмы (рис. 12). Отразим кривую  $\gamma_1$  зеркально в плоскости  $\beta$ , проходящей через боковое ребро грани  $\alpha_1$  и ось призмы. При этом получится кривая  $\gamma_2$ , лежащая в боковой грани  $\alpha_2$ , смежной с  $\alpha_1$ . Затем аналогично строим кривую  $\gamma_2$  в грани  $\alpha_3$ , смежной с  $\alpha_2$ , и т. д. Так в каждой грани  $\alpha_i$  построим кривую  $\gamma_i$ .

Проведем теперь через кривые  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  цилиндрическую поверхность  $Z_{12}$  с образующими, перпендикулярными плоскости  $\beta$ . Аналогично построим цилиндрические поверх-

ности  $Z_{23}$ ,  $Z_{34}$  и т. д. Поверхности  $Z_{12}$ ,  $Z_{23}$ , . . . составляют трубчатую поверхность  $Z$ , всюду гладкую, кроме ребер  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$ , . . . (рис. 13). Утверждается, что построенная таким образом поверхность  $Z$  изометрична цилиндру.

Для того чтобы это доказать, покажем сначала, что поверхность  $Z$  локально изометрична плоскости, т. е. что каждая точка этой поверхности имеет окрестность, изометричную куску плоскости. Это очевидно для точек, не лежащих на ребрах  $\gamma_i$  поверхности. Рассмотрим точки на одной из кривых  $\gamma_i$ , например  $\gamma_2$ .

Отразим поверхность  $Z_{23}$  зеркально в плоскости грани  $\alpha_2$ . Полученная при этом поверхность  $Z_{23}^*$  является продолжением поверхности  $Z_{12}$  за край  $\gamma_2$  в виде цилиндрической поверхности. Поверхность, составленная из  $Z_{12}$  и  $Z_{23}^*$ , как цилиндрическая, вдоль кривой  $\gamma_2$  локально изометрична плоскости. Отсюда следует, что вдоль этой кривой поверхность, составленная из  $Z_{12}$  и  $Z_{23}$ , а следовательно, и  $Z$ , тоже локально изометрична плоскости.

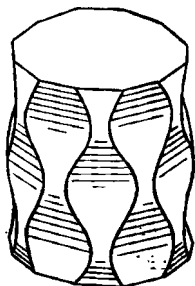


Рис. 13

Приведенная конструкция позволяет без труда заключить также, что замкнутая ломаная  $\bar{\gamma}$ , составленная из прямолинейных образующих поверхностей  $Z_{12}$ ,  $Z_{23}$ , . . . , т. е. пересечение поверхности  $Z$  с плоскостью, перпендикулярной оси призмы, является замкнутой геодезической. Двух приведенных соображений (о локальной изометрии плоскости и замкнутых геодезических) достаточно для того, чтобы заключить об изометрии поверхности  $Z$  круговому цилиндру.

Определим радиус цилиндра, изометричного поверхности  $Z$ . Для этого рассмотрим пересечение поверхности  $Z$  с плоскостью, перпендикулярной оси призмы. Как было указано, получаемая при этом замкнутая ломаная  $\bar{\gamma}$  является геодезической, и, следовательно, ее длина  $L$  связана с радиусом  $R$  цилиндра соотношением

$$L = 2\pi R.$$

Ломаная  $\bar{\gamma}$  вписана в правильный  $2n$ -угольник  $\bar{\gamma}_0$ , по которому плоскость, в которой лежит  $\bar{\gamma}$ , пересекает боковую поверхность призмы (рис. 14). Так как стороны  $\bar{\gamma}$  со сторонами многоугольника  $\bar{\gamma}_0$  образуют равные углы

$(\pi/2n)$ , то независимо от формы ломаная  $\bar{\gamma}$  имеет всегда один и тот же периметр  $L$ , равный периметру правильного  $2n$ -угольника с вершинами в серединах сторон многоугольника  $\bar{\gamma}_0$ . Теперь не составляет труда найти периметр ломаной  $\bar{\gamma}$ , а следовательно, и радиус  $R$  цилиндра, изометричного поверхности  $Z$ .

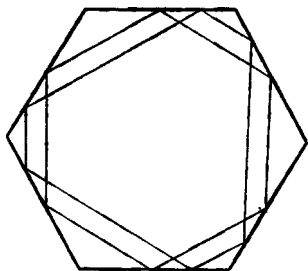


Рис. 14

Приведенное соображение позволяет сделать важный вывод. Именно: радиус цилиндра, изометричного  $Z$ , не зависит от того, какова была взята кривая  $\gamma$  на грани призмы  $\alpha_1$  при построении поверхности  $Z$ .

Проведем через ось призмы и одно из ее боковых ребер плоскость. Она пересечет поверхность  $Z$  по некоторой кривой  $\bar{\gamma}$ . На поверхности кругового цилиндра, которому изометрична поверхность  $Z$ , кривой  $\bar{\gamma}$  по изометрии соответствует прямолинейная образующая. Следовательно, длина кривой  $\bar{\gamma}$  равна высоте цилиндра, изометричного  $Z$ , и не зависит от того, через какое из боковых ребер проведена секущая плоскость, определяющая кривую  $\gamma$ .

Предположим теперь, что кривая  $\gamma_1$  на боковой грани  $\alpha_1$ , с помощью которой описанной выше конструкцией получается поверхность  $Z$ , произвольным образом деформируется, но так, что длина кривой  $\bar{\gamma}$  сохраняется. При этом поверхность  $Z$  также деформируется. И так как радиус и высота цилиндра, изометричного  $Z$ , не изменяется, то эта деформация есть геометрическое изгибание. С помощью такого изгибания мы будем приближать упругую деформацию цилиндрической оболочки в закритической стадии.

В связи с применением принципа А к исследованию закритических упругих состояний цилиндрических оболочек при осевом сжатии нам предстоит рассмотреть функционал

$$W = U - A$$

на множестве всех изометрических преобразований цилиндрической поверхности, обладающих периодичностью строения. Если в качестве кривой  $\gamma$ , с помощью которой стро-

итя описанным выше способом поверхность  $Z$ , взять периодическую кривую, то поверхность  $Z$  будет обладать такой же периодичностью. Но возникает вопрос, всякая ли изометричная цилиндру поверхность, обладающая периодичностью строения, может быть построена таким способом? Покажем, что это действительно так.

Пусть некоторая поверхность  $Z$  обладает периодичностью строения по высоте и в окружном направлении. Требуется показать, что она получается описанной выше конструкцией. Сохраняя прежнее обозначение, назовем  $\beta$  одну из радиальных плоскостей симметрии поверхности  $Z$  (рис. 15). Эта плоскость пересекает поверхность по некоторой кривой  $\tilde{\gamma}$ . Пусть  $P$  — произвольная точка на этой кривой. Так как поверхность  $Z$  развешивающаяся, то через каждую ее точку, в частности через точку  $P$ , проходит прямолинейная образующая  $g(P)$ . Если предположить для простоты, что поверхность  $Z$  не содержит плоских кусков, то прямолинейная образующая  $g(P)$ , проходящая через точку  $P$ , будет единственной.

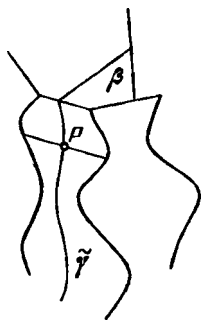


Рис. 15

В силу симметрии поверхности  $Z$  относительно плоскости  $\beta$ , прямолинейная образующая  $g(P)$ , будучи единственной, лежит либо в плоскости  $\beta$ , либо перпендикулярна этой плоскости. Первая возможность исключается, так как в противном случае переход цилиндрической поверхности в поверхность  $Z$  не сопровождается осевым сжатием. Таким образом, прямолинейные образующие поверхности в точках линии  $\tilde{\gamma}$  должны быть перпендикулярны плоскости  $\beta$ , и, следовательно, параллельны друг другу. А это значит, что поверхность  $Z$  вблизи линии  $\tilde{\gamma}$  должна быть цилиндрической поверхностью, с образующими, перпендикулярными плоскости симметрии  $\beta$ . Такое же строение имеет поверхность  $Z$  с противоположной стороны вблизи линии  $\tilde{\gamma}_1$ .

Поскольку поверхность  $Z$  имеет  $n$  плоскостей симметрии, то она должна состоять из  $2n$  цилиндрических поверхностей с образующими, перпендикулярными этим плоскостям. Будучи так устроена, поверхность  $Z$  должна иметь особые линии — ребра. Пусть  $\gamma$  — одно из таких ребер, и  $Z_1, Z_2$  — цилиндрические поверхности, которые пересе-

каются по этому ребру (рис. 16). Так как поверхность  $Z$  локально изометрична плоскости, то поверхности  $Z_1$  и  $Z_2$  не могут быть совершенно произвольными. Установим связь между ними.

Пусть  $\tilde{\gamma}$  — пересечение поверхности  $Z_1$  с плоскостью симметрии  $Z$ , перпендикулярной ее образующим. Кривая  $\tilde{\gamma}$  является геодезической линией. Будем характеризовать положение произвольной точки  $P$  кривой  $\gamma$  расстоянием  $u(s)$  этой точки от  $\tilde{\gamma}$  по образующей ( $s$  — дуга вдоль  $\tilde{\gamma}$ ).

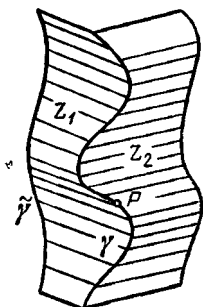


Рис. 16

Так как поверхность  $Z$  локально изометрична плоскости, то сумма геодезических кривизн линии  $\gamma$  на поверхностях  $Z_1$  и  $Z_2$  должна быть равна нулю. При заданной поверхности  $Z_1$  и направлении образующих поверхности  $Z_2$  это условие дает некоторое дифференциальное уравнение второго порядка для функции  $u(s)$ :

$$u'' = \varphi(u', s). \quad (*)$$

Из единственности решения этого уравнения следует, что кривая  $\gamma$  определяется однозначно (на поверхности  $Z_1$ ), если задана какая-нибудь ее точка и направление в ней.

Ввиду периодичности строения поверхности  $Z$  по высоте, на линии  $\gamma$  найдется такая точка  $P_0$ , в которой касательная к ней параллельна оси поверхности (осью мы называем прямую, по которой пересекаются плоскости симметрии). Проведем через точку  $P_0$  плоскость  $\alpha$ , параллельную оси поверхности, так, чтобы образующие поверхностей  $Z_1$  и  $Z_2$ , исходящие из точки  $P_0$ , составляли равные углы с плоскостью  $\alpha$  и располагались по одну ее сторону. Пусть  $\gamma'$  — кривая, по которой плоскость  $\alpha$  пересекает поверхность  $Z_1$  и ее продолжение за кривую  $\gamma$ . Кривая  $\gamma'$  удовлетворяет уравнению (\*). Соответствующая поверхность  $Z_2'$  строится зеркальным отражением в плоскости  $\alpha$  той части поверхности  $Z_1$  и ее продолжения, которая находится за кривой  $\gamma'$ . Так как кривые  $\gamma$  и  $\gamma'$  имеют общую точку ( $P_0$ ) и общее направление в ней, то они совпадают. Отсюда следует, что поверхность  $Z$  получается описанной выше конструкцией. Плоскость  $\alpha$  является одной из граней призмы.

В связи с вычислением функционала

$$W = U - A$$

на изометрических преобразованиях исходной поверхности оболочки, определим некоторые величины для построенной, изометричной цилиндру поверхности  $Z$ .

Обозначим  $\alpha$  одну из граней призмы, в которую вписана поверхность  $Z$ . Ребро этой поверхности, лежащей в грани  $\alpha$ , обозначим  $\gamma$ . Проведем через ось призмы и боковое ребро грани  $\alpha$  плоскость  $\beta$ , и пересечение ее с поверхностью  $Z$  обозначим  $\tilde{\gamma}$ . Кривая  $\tilde{\gamma}$  представляет собой нормальное сечение поверхности  $Z$ , перпендикулярное образующим.

Введем в плоскости грани  $\alpha$  прямоугольную декартову систему координат  $xy$ , приняв за ось  $x$  прямую, параллельную боковым ребрам грани и проходящую посередине между ними, а за ось  $y$  — прямую, перпендикулярную оси  $x$ . Пусть в этих координатах ребро  $\gamma$  поверхности  $Z$  задается уравнением

$$y = y(x).$$

В плоскости  $\beta$  также введем прямоугольную декартову систему координат, приняв за оси  $x$  и  $y$  проекции осей координат, введенных в плоскости  $\alpha$ . В этих координатах нормальное сечение  $\tilde{\gamma}$  поверхности  $Z$  задается уравнением

$$y = \tilde{y}(x) = \sin \frac{\pi}{2n} y(x).$$

Мы будем предполагать  $n$  достаточно большим, и поэтому можно считать

$$\tilde{y}(x) \simeq \frac{\pi}{2n} y(x).$$

По известной формуле кривизна ребра  $\gamma$  поверхности  $Z$  равна

$$k = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}.$$

Нормальная кривизна поверхности  $Z$  в сечении, перпендикулярном образующим,

$$\tilde{k} = \frac{\tilde{y}''}{(1+\tilde{y}'^2)^{3/2}}.$$

Предполагая  $n$  большим, мы опустим член  $\tilde{y}'^2$  в знаменателе этой формулы. Тогда получим

$$\tilde{k} = \tilde{y}''.$$

Или, вводя вместо  $\tilde{y}$  функцию  $y$ ,

$$\tilde{k} = \frac{\pi}{2n} y''.$$

Определим угол  $\theta$ , который образует плоскость ребра  $\gamma$  поверхности  $Z$  с касательными плоскостями. С этой целью систему координат  $xy$  в плоскости  $\beta$  дополним до пространственной системы координат  $xyz$ . В такой системе координат угловые коэффициенты плоскости ребра  $\gamma$ , т. е. плоскости  $\alpha$ , будут  $0, 1, -\pi/2n$ , угловые коэффициенты касательной плоскости поверхности будут  $\pi y'/2n, 1, 0$ . Угол между плоскостями равен углу между векторами  $(0, 1, -\pi/2n), (\pi y'/2n, 1, 0)$ . Отсюда для угла  $\theta$  при большом  $n$  получается следующее значение:

$$\theta = \frac{\pi}{2n} \sqrt{1 + y'^2}.$$

## 2. Энергия закритической деформации цилиндрической оболочки

Как показывает опыт, круговая цилиндрическая оболочка, шарнирно опертая по краям, при равномерном осевом сжатии после потери устойчивости в средней части имеет периодическое строение в окружном направлении и по высоте (см. рис. 22). В связи с этим мы будем приближать форму оболочки в закритической стадии поверхностью  $Z$ , которая была построена в п. 1.

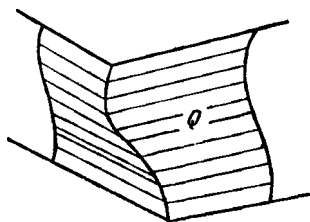


Рис. 17

Проведем через соседние вершины кривой  $\gamma$ , задающей поверхность  $Z$ , плоскости, перпендикулярные оси призмы.

При этом выделяется пояс поверхности  $Z$ . Пусть  $b$  — высота этого пояса. Проведем далее полуплоскости от оси призмы через соседние боковые ребра. Они вырезают из пояса область  $Q$  шириной  $a = \pi R/n$  (рис. 17). Найдем энергию деформации оболочки исходя из ее приближения поверхностью  $Z$ .

Энергия деформации в области  $Q$  состоит из двух частей:  $U_Q$  — энергии деформации по основной поверхности и  $U_\gamma$  — энергии деформации вдоль ребра. Энергия  $U_Q$  определяется изгибом исходной цилиндрической формы в форму  $Z$  всюду кроме ребра  $\gamma$ . На единицу площади поверхности она определяется по формуле

$$\bar{U}_Q = \frac{D}{2} (\Delta k_1^2 + \Delta k_2^2 + 2\nu \Delta k_1 \Delta k_2).$$

Здесь  $\Delta k_1$  и  $\Delta k_2$  — главные изменения нормальных кри-



визн при указанной деформации поверхности, а  $D$ — жесткость оболочки на изгиб, т. е.

$$D = \frac{E\delta^3}{12(1-\nu^2)},$$

где  $\delta$ —толщина оболочки,  $E$ —модуль упругости, а  $\nu$ — коэффициент Пуассона.

Для нормальных кривизн  $k_1$  и  $k_2$  исходной цилиндрической поверхности имеем

$$k_1 = 0, \quad k_2 = \frac{1}{R}.$$

По соответствующим направлениям нормальные кривизны поверхности  $Z$  равны

$$k_1 = \pm \frac{\pi}{n} y'', \quad k_2 = 0.$$

(Нормальные кривизны в смежных радиальных нормальных сечениях поверхности, образующих угол  $\pi/n$ , равны по величине, но противоположны по знаку. Этим объясняется двузначность в выражении  $k_1$ .) Таким образом, при рассматриваемой деформации поверхности

$$\Delta k_1 = \pm \frac{\pi}{2n} y'', \quad \Delta k_2 = -\frac{1}{R}.$$

Отсюда

$$U_Q = \frac{D}{2} \iint_Q \left\{ \left( \frac{\pi y''}{2n} \right)^2 + \frac{1}{R^2} \pm 2\nu \left( \frac{\pi y''}{2n} \right) \frac{1}{R} \right\} dx dy.$$

Выполняя интегрирование по  $y$ , получим

$$U_Q = \frac{Da}{2} \int_{(b)} \left( \frac{\pi y''}{2n} \right)^2 dx + \nu D \int_{(b)} \frac{\pi}{2\pi R} y'' (a' - a'') dx + \text{const},$$

где  $a'$  и  $a''$ —длины отрезков образующих поверхности  $Z$  в области  $Q$ , разделяемые ребром  $\gamma$ . При большом  $n$

$$a' \simeq \frac{a}{2} - y, \quad a'' \simeq \frac{a}{2} + y.$$

Поэтому

$$\int_{(b)} y'' (a' - a'') dx = -2 \int_{(b)} y y'' dx.$$

Выполняя интегрирование по частям и замечая, что  $y'$  на концах интервала интегрирования  $(b)$  равно нулю,

получим

$$\int_{(b)} y'' (a' - a'') dx = 2 \int_{(b)} y''^2 dx.$$

Следовательно,

$$U_Q = \frac{D\pi^2 a}{8n^2} \int_{(b)} y''^2 dx + \frac{\nu D\pi}{nR} \int_{(b)} y''^2 dx + \text{const.}$$

Энергия деформации  $U_\gamma$  вдоль ребра  $\gamma$  определяется по формуле

$$U_\gamma = U_\gamma^0 + \Delta U_\gamma,$$

где

$$U_\gamma^0 = \int_\gamma c E \delta^{5/2} \alpha^{5/2} k^{1/2} ds,$$

$$\Delta U_\gamma = \frac{E \delta^3}{6(1-\nu^2)} \int_\gamma \alpha \left( k_n - \nu k_\gamma + \frac{k_e + k_i}{2} \right) ds.$$

Здесь  $k$  — кривизна кривой  $\gamma$ ,  $\alpha$  — угол между плоскостью ребра  $\gamma$  и касательными плоскостями поверхности  $Z$  вдоль ребра;  $k_i$  и  $k_e$  — нормальные кривизны поверхности  $Z$  в направлении, перпендикулярном ребру,  $k_n$  — нормальная кривизна исходной поверхности в соответствующем направлении,  $k_\gamma$  — нормальная кривизна исходной поверхности в направлении, соответствующем ребру. Интегрирование выполняется по дуге  $s$  кривой  $\gamma$ .

Найдем значение  $\Delta U_\gamma$ . Нормальные кривизны  $k_i$  и  $k_e$  равны по величине и противоположны по знаку. Поэтому

$$k_i + k_e = 0$$

и, следовательно,

$$\Delta U_\gamma = - \frac{E \delta^3}{6(1-\nu^2)} \int_\gamma \alpha (k_n + \nu k_\gamma) ds.$$

Угол

$$\alpha = \frac{\pi}{2n} (1 + y'^2)^{1/2}.$$

По формуле Эйлера нормальная кривизна

$$k_n = \frac{1}{R} \cos^2 \theta, \quad k_\gamma = \frac{1}{R} \sin^2 \theta,$$

где  $\theta$  — угол, который составляет прямолинейная образующая исходной цилиндрической поверхности с направлением кривой, соответствующей по изометрии  $\gamma$ , т. е.

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}, \quad \sin \theta = \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}.$$

Наконец, элемент дуги кривой  $\gamma$  равен

$$ds = \sqrt{1 + y'^2} dx.$$

Подставляя значения  $\alpha$ ,  $k_n$ ,  $k_\gamma$  и  $ds$  в формулу для  $\Delta U_\gamma$ , получим

$$\Delta U_\gamma = -\frac{\nu D\pi}{n} \int_{(b)} y''^2 dx + \text{const.}$$

Вычислим  $U_\gamma^0$ . Принимая во внимание выражения для  $\alpha$ ,  $ds$  и

$$k = \frac{|y''|}{(1 + y'^2)^{3/2}},$$

получим

$$U_\gamma^0 = cE\delta^{5/2} \left(\frac{\pi}{2n}\right)^{5/2} \int_{\gamma} |y''|^{1/2} (1 + y'^2) dx.$$

Полная энергия деформации  $U_1$  по области  $Q$  получается сложением величин  $U_Q$ ,  $U_\gamma^0$  и  $\Delta U_\gamma$ :

$$U_1 = \frac{D\pi^2 a}{8n^2} \int_{(b)} y''^2 dx + \\ + cE\delta^{5/2} \left(\frac{\pi}{2n}\right)^{5/2} \int_{(b)} |y''|^{1/2} (1 + y'^2) dx + \text{const.}$$

Области  $Q$ , расположенные между двумя плоскостями, проходящими через смежные вершины ребра  $\gamma$  перпендикулярно оси призмы, образуют кольцевой пояс высотой  $b$ . В дальнейшем нам будет удобно рассматривать не всю оболочку, а этот пояс. Энергия деформации оболочки внутри указанного пояса получается умножением энергии деформации в области  $Q$  на  $2n$  — число областей внутри пояса, т. е.

$$U = \frac{D\pi^2 a}{4n} \int_{(b)} y''^2 dx + \\ + 2cnE\delta^{5/2} \left(\frac{\pi}{2n}\right)^{5/2} \int_{(b)} |y''|^{1/2} (1 + y'^2) dx + \text{const.}$$

Найдем осевое сжатие при изометрическом преобразовании кругового цилиндра в поверхность  $Z$ . Возьмем на цилиндре область  $G$ , расположенную между двумя сечениями, перпендикулярными оси и отстоящими друг от друга на расстоянии  $b$ . Изометричная ей область  $Z_G$  на поверхности  $Z$  ограничена двумя плоскостями, перпенди-

кулярными осями призмы и отстоящими друг от друга на некоторое расстояние  $b'$ . Осевое сжатие, о котором идет речь, есть разность  $b - b' = \Delta b$ .

Высота  $b$  пояса  $G$  на цилиндре, как показано выше, равна длине кривой  $\tilde{y}$  на поверхности  $Z_G$ . Следовательно,

$$b = \int \sqrt{1 + \tilde{y}'^2} dx,$$

где интегрирование выполняется по высоте пояса  $Z_G$  поверхности  $Z$ , и

$$\int dx = b'.$$

Предполагая, как и раньше,  $\tilde{y}'^2$  малым, можем записать

$$b \simeq \int \left(1 + \frac{\tilde{y}'^2}{2}\right) dx = b' + \frac{\pi^2}{8n^2} \int y'^2 dx.$$

Отсюда

$$\Delta b \simeq \frac{\pi^2}{8n^2} \int y'^2 dx.$$

Зная осевое сжатие оболочки, без труда находим работу, производимую внешней нагрузкой  $p$ . Имению:

$$A = 2\pi R \delta p \frac{\pi^2}{8n^2} \int_{(b)} y'^2 dx.$$

### 3. Исследование закритических упругих состояний цилиндрической оболочки при осевом сжатии

Мы будем исследовать закритические упругие состояния цилиндрической оболочки при осевом сжатии, исходя из вариационного принципа А, который сводит этот вопрос к рассмотрению вариационной задачи для функционала

$$W = U - A.$$

Слагаемые  $U$  и  $A$  этого функционала найдены в п. 2. Однако их выражения содержат неизвестные параметры  $a$  и  $b$ . Для того чтобы придать им определенные значения, мы будем исходить из предположения, что периодичность прогибов оболочки сохраняется при закритической деформации и такая же, как в момент потери устойчивости. Для того чтобы определить периодичность прогибов в момент потери устойчивости, мы обратимся к линейной теории оболочек [5].

В линейной теории оболочек доказывается, что нормальный прогиб  $w$  цилиндрической оболочки радиусом  $R$  в момент потери устойчивости удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{D}{\delta} \Delta \Delta \Delta \Delta w + \frac{E}{R^2} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + p \Delta \Delta \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = 0. \quad (*)$$

Здесь  $x$  и  $y$  — криволинейные координаты:  $x$  — по образующей,  $y$  — по круговому сечению, перпендикулярному оси;  $D$  — жесткость оболочки на изгиб,  $p$  — критическая нагрузка, а

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

— оператор Лапласа. Анализируя это уравнение, приходят к выводу о том, что прогиб оболочки в момент потери устойчивости при условии шарнирного опирания по краям имеет вид

$$w = c \sin \frac{2\pi m x}{L} \sin \frac{n y}{R}.$$

Подставляя это выражение в уравнение (\*), получим связь между параметрами волнообразования  $m$ ,  $n$  и критической нагрузкой  $p$ :

$$\frac{D}{\delta} \left( \frac{4\pi^2 m^2}{L^2} + \frac{n^2}{R^2} \right)^4 + \frac{E}{R^2} \left( \frac{2\pi m}{L} \right)^4 - p \left( \frac{4\pi^2 m^2}{L^2} + \frac{n^2}{R^2} \right) \left( \frac{2\pi m}{L} \right)^2 = 0.$$

Введем вместо  $m$  и  $n$  параметры  $\xi$  и  $\eta$ :

$$\xi = \frac{Ln}{2\pi Rm}, \quad \eta = \frac{n^2 \delta}{R}.$$

Тогда, полагая

$$p = \bar{p} E \frac{\delta}{R},$$

будем иметь

$$\bar{p} = \frac{1}{12(1-\nu^2)} \frac{(1+\xi^2)^2}{\xi^2} \eta + \frac{\xi^2}{(1+\xi^2)^2 \eta}.$$

Наименьшее значение  $\bar{p}$  отвечает верхней критической нагрузке. Оно получается, если параметры  $\xi$  и  $\eta$  связаны соотношением

$$\frac{\xi^2}{(1+\xi^2)^2 \eta} = \frac{1}{\sqrt{12(1-\nu^2)}}. \quad (**)$$

Тогда

$$p_e = \min p = \frac{1}{\sqrt{3(1-\nu^2)}}.$$

Соотношение (\*\*\*) не определяет  $\xi$  и  $\eta$ , а следовательно,  $m$  и  $n$  однозначно. Однако, как показывает опыт, оболочка теряет устойчивость таким образом, что значение  $\xi \simeq 1$ . Если для  $\xi$  принять это значение, то соотношение (\*\*\*) определяет  $\eta$ , а значит,  $m$  и  $n$ . В частности, для  $n$  получается следующая формула:

$$n = \frac{1}{2} \sqrt[4]{12(1-\nu^2)} \sqrt{\frac{R}{\delta}}.$$

При  $\nu = 0,3$

$$n \simeq 0,91 \sqrt{\frac{R}{\delta}}.$$

Предположив, что периодичность прогибов оболочки сохраняется при закритической деформации, и, следовательно, она такая же, как и в момент потери устойчивости, мы должны считать, что размеры  $a$ ,  $b$  области  $Q$  оболочки одинаковы, так как

$$\frac{a}{b} = \xi = 1,$$

а параметр  $n$  определяется по указанной выше формуле.

Истинная форма оболочки при закритической деформации, сопровождающейся осевым сжатием  $\Delta b$ , определяется из условия минимума функционала  $U(y)$  в классе функций  $y(x)$ , удовлетворяющих условию

$$\Delta b = \frac{\pi^2}{8n^2} \int_{(b)} y'^2 dx = \text{const.}$$

Для решения этой вариационной задачи представляется целесообразным перейти к безразмерным переменным  $\bar{x}$  и  $\bar{y}$ , полагая

$$x = \frac{b}{2} \bar{x}, \quad y = \frac{2n}{\pi} \sqrt{bh} \bar{y},$$

где  $h$  обозначает осевое сжатие оболочки (т. е.  $h = \Delta b$ ). В новых переменных  $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$ , черту над которыми мы для

простоты записи опускаем,

$$U = \frac{2E\delta^3 a n h}{3(1-\nu^2)b^2} \int_{-1}^1 y'^2 dx + \\ + 2ncE\delta^{5/2} \left(\frac{\pi}{2n}\right)^2 (bh)^{1/4} \int_{-1}^1 |y''|^{1/2} \left(1 + \frac{16n^2 h}{\pi^2 b} y'^2\right) dx + \text{const.}$$

Положим теперь

$$\frac{b}{a} = \xi, \quad h = \frac{1}{2} \left(\frac{a\pi}{2n}\right)^2 \frac{\lambda}{b}.$$

Тогда получим

$$U = \frac{\pi^2 E \delta^3 \lambda}{12(1-\nu^2)n\xi^3} \int_{-1}^1 y'^2 dx + \\ + 2^{1/4} c \pi^3 \frac{1}{4n^2} E \delta^{5/2} R^{1/2} \lambda^{1/4} \int_{-1}^1 |y''|^{1/2} \left(1 + \frac{2\lambda}{\xi^2} y'^2\right) dx + \text{const.}$$

Как показано выше, в момент потери устойчивости оболочки имеем

$$\xi = 1, \quad n = 0,91 \sqrt{\frac{R}{\delta}}.$$

Подставляя эти значения в выражение энергии деформации, получим

$$U = \frac{\pi^2 E \delta^3}{12(1-\nu^2)n} \left( \lambda \int_{-1}^1 y'^2 dx + 2\lambda^{1/4} \int_{-1}^1 |y''|^{1/2} (1 + 2\lambda y'^2) dx \right) + \text{const.}$$

Здесь принято  $\nu = 0,3$ ,  $c = 0,19$ .

Положим

$$J(y) = \lambda \int_{-1}^1 y'^2 dx + 2\lambda^{1/4} \int_{-1}^1 |y''|^{1/2} (1 + 2\lambda y'^2) dx.$$

Тогда определение формы оболочки при закритической деформации сводится к нахождению функции  $y(x)$ , реализующей минимум функционала  $J(y)$  при условии

$$\int_{-1}^1 y'^2 dx = 1.$$

Относительно функции  $y(x)$ , для которой функционал  $J$  достигает минимума, существенно заметить, что график

этой функции имеет точку перегиба при  $x=0$ , а в точках  $x=\pm 1$  кривизна стационарна (рис. 18). Поэтому представляется естественным аппроксимировать этот график двумя парабололами с вершинами на прямых  $x=\pm 1$ , расположенными симметрично относительно начала координат, и гладко примыкающим к ним прямолинейным отрезком (рис. 19). Функцию  $y(x)$ , задаваемую этим графиком, мы будем характеризовать двумя параметрами  $k$  и  $l$ . Величина

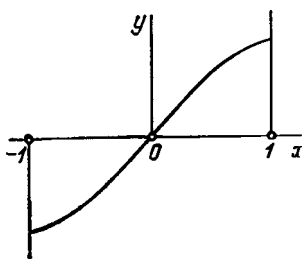


Рис. 18

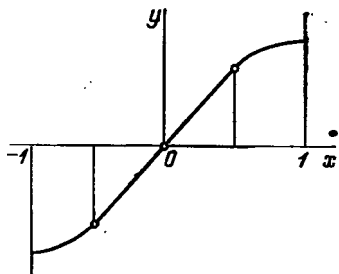


Рис. 19

$k$  — это угловой коэффициент наклонных участков графика  $y'(x)$ , а  $l$  — значение  $y'(x)$  в нуле. Таким образом,  $k=|y''|$  при  $x=\pm 1$ , а  $l=y'(0)$ .

Несложным рассмотрением показывается, что область допустимых значений параметра  $l$ , определяемая условием

$$\int_{-1}^1 y'^2 dx = 1,$$

будет

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \leq l \leq \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Также показывается, что значения  $\lambda$ , характеризующие общую деформацию оболочки, ограничены, именно:

$$\lambda < \frac{4}{3}.$$

Для функции  $y(x)$  указанного вида имеем

$$J = 2kl\lambda + \frac{4l}{\sqrt{k}} \lambda^{1/4} + \frac{8l^3}{3\sqrt{k}} \lambda^{5/4},$$

а условие

$$\int_{-1}^1 y'^2 dx = 1$$



переходит в связь между  $k$  и  $l$ :

$$\frac{1}{k} = \frac{3}{2l} - \frac{3}{4l^3}.$$

Для определения минимума  $J$  и значений  $k$ ,  $l$ , при которых этот минимум достигается, были вычислены значения  $J$  для различных  $l$  из указанного выше интервала

$$\frac{1}{\sqrt{2}} < l < \sqrt{\frac{3}{2}}$$

и значений  $\lambda$ , не превосходящих  $4/3$ . При этом оказалось, что  $\min J$  при  $\lambda = \text{const}$  практически всегда получается при одном и том же значении  $l \simeq 0,82$ . А так как значение  $J$  в точке, где достигается минимум, стационарно, то, не совершая большой ошибки, можно принять, что минимум  $J$  равен его значению при  $l = 0,82$ . Тогда получим

$$\min J = 3,5\lambda + 2,24\lambda^{1/4} + \lambda^{5/4}.$$

Следовательно, энергия упругой деформации оболочки в состоянии равновесия равна

$$U = \frac{\pi^2 E \delta^3}{12(1-\nu^2)n} (3,5\lambda + 2,24\lambda^{1/4} + \lambda^{5/4}) + \text{const}.$$

Обратимся теперь к работе  $A$ , производимой внешней нагрузкой  $p$ . Имеем

$$A = 2\pi R \delta p h.$$

Вводя сюда вместо  $h$  параметр  $\lambda$ , согласно равенству

$$h = \frac{1}{2} \left( \frac{a\pi}{2n} \right) \frac{\lambda}{b},$$

и замечая, что

$$\frac{b}{a} = \xi = 1, \quad a = \frac{\pi R}{n}, \quad n = 0,91 \sqrt{\frac{R}{\delta}}, \quad p = \bar{p} E \frac{\delta}{R},$$

будем иметь

$$A = \frac{\pi^4}{3,3n} E \delta^3 \bar{p} \lambda.$$

Для оболочки, находящейся в состоянии упругого равновесия, имеем

$$d(U - A) = 0.$$

Отсюда получается величина безразмерной нагрузки  $\bar{p}$  в зависимости от параметра  $\lambda$ , характеризующего осевое

сжатие,

$$\bar{p} = 0,03 (3,5 + 0,56\lambda^{-3/4} + 1,25\lambda^{1/4}).$$

Напомним, что здесь, как и везде в аналогичных случаях, параметр  $\lambda$  нельзя брать сколь угодно малым,

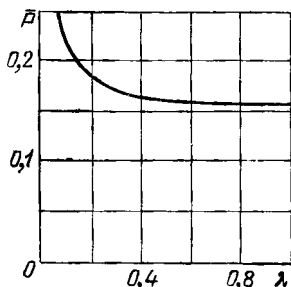


Рис. 20

так как он характеризует деформацию, которая предполагается значительной.

Графически зависимость  $\bar{p}$  от  $\lambda$  представлена на рис. 20. Мы видим, что воспринимаемая оболочкой нагрузка после потери устойчивости падает. Наименьшее значение  $\bar{p} \approx 0,16$ .

Таким образом, нижняя критическая нагрузка  $p$  для цилиндрической оболочки при осевом сжатии определяется по формуле

$$p = 0,16E \frac{\delta}{R}.$$

#### 4. Экспериментальное определение нижней критической нагрузки для цилиндрической оболочки при осевом сжатии

Полученная в п. 3 формула для нижней критической нагрузки была подвергнута экспериментальной проверке [1]. Экспериментальное определение критических нагрузок при осевом сжатии цилиндрической оболочки производилось на установке, которая схематически изображена на рис. 21. Основным элементом установки являются два строго параллельных диска 1, которые при затягивании гайки 2, выполненной в виде штурвала, сближаются и сжимают испытываемую оболочку 3.

Нижний диск имеет втулку, в которую проходит стержень верхнего диска. Оба диска после сочленения втулки

и стержня по скользящей посадке обработаны с одной установки, чем и достигнута строгая параллельность их друг другу.

Испытуемые оболочки радиусом  $R=40$  мм, длиной  $L=80$  мм получались из меди напылением в вакууме на геометрически совершенную полированную цилиндрическую поверхность. Края оболочки обрезались на специальной оправке также с одной установки станка.

Для того чтобы обеспечить полную равномерность распределения сжимающего усилия по краю оболочки, между опорными дисками 1—1 и торцами оболочки поставлена тонкая эластичная прокладка 4. Края оболочки центрировались на конических шайбах 8.

Сжимающее усилие регистрировалось с помощью тензометрических датчиков, установленных на кольце 5, через которое передавалось усилие от винта 6 на стержень верхнего опорного диска 1. Тензометрические датчики тарировались на величину сжимающего усилия с помощью съемного груза 7.

Эксперимент проводился следующим образом. Испытуемый образец устанавливался между опорными дисками 1—1. С помощью съемного груза 7 тарировались показания тензометрических датчиков на величину сжимающего усилия. Затем вращением штурвала 2 оболочка сжималась. Сжимающее усилие регистрировалось показанием гальванометра, подключенного к тензометрическим датчикам. Когда сжимающее усилие достигало верхнего критического значения  $f_e$ , оболочка теряла устойчивость с образованием системы правильно расположенных вмятин на ее поверхности (рис. 22).

В результате потери устойчивости воспринимаемая оболочкой нагрузка снижалась и продолжала снижаться при дальнейшем сближении опорных дисков. В конце концов она достигала минимального значения  $f_l$  (нижнее критическое значение).

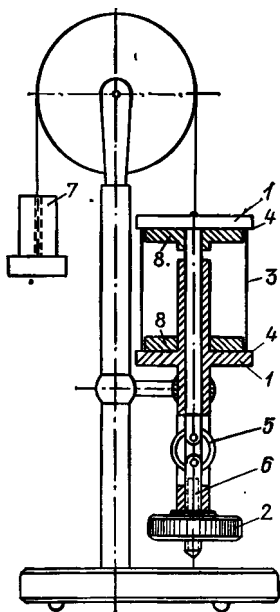


Рис. 21

Испытанию подвергались цилиндрические оболочки радиусом  $R=40$  мм, высотой  $L=80$  мм с различной толщиной  $\delta$  от 0,03 до 0,09 мм. На рис. 23 представлены графики теоретической зависимости величин  $f_e$  и  $f_i$  от толщины оболочки:

$$f_e = 0,6E \frac{\delta}{R} (2\pi R\delta), \quad f_i = 0,16E \frac{\delta}{R} (2\pi R\delta).$$

Модуль упругости  $E$  для меди принят равным  $0,9 \cdot 10^6$  кг/см<sup>2</sup>. (Это среднее значение модуля упругости для медных образцов, получаемых напылением в вакууме.) Отдельные точки, обозначенные кружками, дают экспериментальное значение величины  $f_e$ . Как видно, эти значения близки к теоретическим. Следует, однако, заметить, что близость экспериментального значения  $f_e$  к теоретическому была получена только после тщательной отладки установки и подготовки образцов, обеспечивающих равномерность распределения сжимающего усилия по краю оболочки.

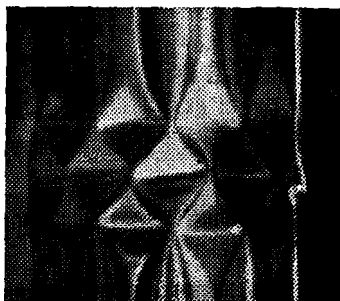


Рис. 22

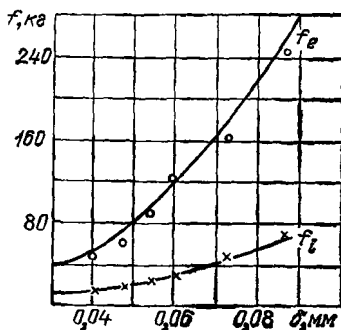


Рис. 23

Экспериментальное исследование величины верхнего критического усилия  $f_e$  дает основание утверждать, что в реальной конструкции теоретическое значение  $f_e$  практически никогда не достигается и на это значение критического усилия нельзя ориентироваться при расчете оболочек на устойчивость.

Экспериментальные значения нижнего критического значения на рис. 23 отмечены крестиками. Нижнее критическое значение  $f_i$  отличалось значительной стабильностью. Его экспериментальное значение было близко к теоретическому во всех случаях, в том числе и тогда, когда верхнее критическое значение  $f_e$  было гораздо ниже

теоретического. Кроме того, значение  $f_i$  практически не изменялось при повторных испытаниях, чего нельзя сказать о верхнем критическом значении.

Сопоставление экспериментального значения  $f_i$  с его теоретическим значением дает основание рекомендовать в качестве расчетного значения для критической нагрузки  $p$  сжатой цилиндрической оболочки полученную выше формулу:

$$p = 0,16E \frac{\delta}{R}.$$

## § 4. БЕСКОНЕЧНО МАЛЫЕ ИЗГИБАНИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ И УСТОЙЧИВОСТЬ ОБОЛОЧЕК

### 1. Бесконечно малые изгибания поверхностей

Рассматривая вопрос о закритических деформациях выпуклых оболочек мы пришли к выводу о возможности, а затем и целесообразности приближения этих деформаций изометрическими преобразованиями исходной формы оболочки. В результате вопрос об определении закритических упругих состояний выпуклых оболочек сведен к рассмотрению вариационной задачи для функционала  $W$ , который определен на изометрических преобразованиях срединной поверхности оболочки (вариационный принцип А). Общие соображения, которыми мы при этом пользовались, в известной степени применимы к исследованию начальной стадии закритической деформации непосредственно после потери устойчивости. Такое исследование мы проведем в настоящем параграфе. Его итогом будет вариационный принцип В, согласно которому исследование потери устойчивости, в частности определение критической нагрузки, сводится к вариационной задаче для некоторого функционала, который мы снова будем обозначать  $W$ , определенного на разрывных бесконечно малых изгибаниях исходной формы оболочки.

Идея состоит в следующем. Представим себе выпуклую оболочку, которая нагружена внешним давлением. Опыт показывает, что при потере устойчивости оболочки под такой нагрузкой происходит четко выраженное выпучивание некоторой области  $G$  на поверхности оболочки. Пока форма оболочки еще достаточно близка к исходной, мы будем аппроксимировать ее бесконечно малыми изгибаниями внутри области  $G$  и вне этой области. Если оболочка жесткая, т. е. ее срединная поверхность как целое не допускает бесконечно малых изгибаний, изгибающие поля внутри области  $G$  и вне ее должны быть различны, т. е. на границе области  $G$  должен быть разрыв изгибающего поля. Для того чтобы аппроксимировать форму оболочки в целом при рассматриваемой деформации, мы

сгладим этот разрыв, пользуясь энергетическими соображениями подобно тому, как это было сделано для закритических деформаций, приближаемых изометрическими преобразованиями с нарушением гладкости в § 1.

Напомним некоторые факты теории бесконечно малых изгибаний выпуклых поверхностей. Пусть  $F$ :

$$r=r(u, v)$$

— регулярная поверхность и  $\tau(u, v)$  — векторное поле, заданное на поверхности. Деформация поверхности  $F$  в поверхность  $F_t$ , задаваемую уравнением

$$r=r(u, v)+t\tau(u, v),$$

называется бесконечно малым изгибанием, если длины кривых на поверхности при этой деформации в начальный момент, т. е. при  $t=0$ , стационарны. Векторное поле  $\tau$  называется изгибающим полем. Бесконечно малое изгибание называется тривиальным, если изгибающее поле  $\tau$  является полем скоростей движения поверхности как твердого целого. Поверхность, не допускающая нетривиальных бесконечно малых изгибаний, называется жесткой.

Строго выпуклая поверхность с закрепленным краем является жесткой. Более того, если поверхность не односвязна и закреплена только вдоль одной компоненты края, то она жесткая. Напротив, если поверхность с краем нигде не закреплена, то она, как правило, допускает нетривиальные бесконечно малые изгибания и притом с большим произволом.

Из условия стационарности длин кривых на поверхности при бесконечно малом изгибании получаются уравнения для изгибающего поля:

$$dr \cdot d\tau = 0.$$

Или, в развернутом виде,

$$r_u \tau_u = 0, \quad r_u \tau_v + r_v \tau_u = 0, \quad r_v \tau_v = 0.$$

Если поверхность задана уравнением  $z=z(x, y)$ , то уравнения бесконечно малых изгибаний будут

$$\xi_x + z_x \zeta_x = 0, \quad \xi_y + \eta_x + z_x \zeta_y + z_y \zeta_x = 0, \quad \eta_y + z_y \zeta_y = 0,$$

где  $\xi, \eta, \zeta$  — компоненты изгибающего поля по осям  $x, y, z$ . Из этих уравнений путем исключения функций  $\xi$  и  $\eta$  получается уравнение для функции  $\zeta$ :

$$z_{xx} \zeta_{yy} - 2z_{xy} \zeta_{xy} + z_{yy} \zeta_{xx} = 0.$$

Пусть в области  $G$  на поверхности задано изгибающее поле  $\tau_1$ , а вне этой области — изгибающее поле  $\tau_2$ . Векторное поле, заданное таким образом на всей поверхности, вообще говоря, будет иметь разрыв на границе  $\gamma$  области. Выясним направление вектора  $\Delta\tau = \tau_2 - \tau_1$  на кривой  $\gamma$ , если составляющие  $\tau_1$  и  $\tau_2$  по касательной к  $\gamma$  равны. Итак, пусть  $\Delta\tau \cdot dr = 0$ . Дифференцируя это равенство вдоль  $\gamma$ , получим

$$\Delta d\tau \cdot dr = \Delta\tau \cdot d^2r = 0.$$

Так как поля  $\tau_1$  и  $\tau_2$  изгибающие на  $\gamma$ , то  $d\tau_1 \cdot dr = 0$ ,  $d\tau_2 \cdot dr = 0$ . Поэтому  $\Delta d\tau \cdot dr = 0$  и, следовательно,  $\Delta\tau \cdot d^2r = 0$ . Так как  $\Delta\tau \cdot dr = 0$  и  $\Delta\tau \cdot d^2r = 0$ , то вектор  $\Delta\tau$  направлен по бинормали кривой  $\gamma$ . Верно также обратное. Именно: если разность  $\Delta\tau$  изгибающих полей на  $\gamma$  направлена по бинормали к  $\gamma$ , то составляющая этой разности по касательной к  $\gamma$  равна нулю.

В связи с исследованием потери устойчивости выпуклых оболочек нас будет интересовать следующий вопрос. Пусть на регулярной строго выпуклой поверхности (с положительной гауссовой кривизной) задана произвольная гомотопная кругу область  $G$ , ограниченная регулярной кривой  $\gamma$ . Спрашивается, существует ли не равное нулю изгибающее поле в области  $G$  с равной нулю составляющей по касательной к  $\gamma$  на границе области  $G$ ? Вопрос может быть поставлен иначе. Именно: существует ли не равное нулю изгибающее поле в области  $G$ , направленное по бинормали кривой  $\gamma$  на границе  $G$ ? В такой постановке вопрос сводится к существованию изгибающего поля с втулочной связью на границе поверхности. Как известно, такие поля всегда существуют и притом с произволом трех параметров [6].

Приведем пример. Если область  $G$  отсекается от поверхности плоскостью, то эти изгибающие поля суть: поле скоростей смещения области  $G$  в направлении, перпендикулярном плоскости, поля вращений области  $G$  относительно двух непараллельных прямых в этой плоскости и любая их линейная комбинация.

## 2. Вариационный принцип $\mathbb{B}$ и его обоснование

Пусть потеря устойчивости оболочки под действием данной нагрузки сопровождается выпучиванием области  $G$ , ограниченной кривой  $\gamma$ . Исходя из наглядного представления о характере выпучивания мы полагаем, что существ-



венные внутренние деформации оболочка испытывает только в окрестности кривой  $\gamma$ , а вне этой окрестности деформация сводится к бесконечно малому изгибанию. Соответственно энергия деформации оболочки сосредоточена в этой окрестности. Изгибающие поля внутри области  $G$  и вне этой области подчиняются естественному ограничению. Именно: мы будем требовать, чтобы их составляющие по направлению  $\gamma$  были равны. Это ограничение имеет простой физический смысл. Если эти составляющие различны, то касательные напряжения в срединной поверхности оболочки при сужении окрестности кривой  $\gamma$  были бы сколь угодно велики. А это невозможно по энергетическим соображениям.

Предполагая близость деформированной оболочки к ее исходной форме и воспроизводя рассуждения § 2, получим такое же по форме, как и там, выражение для  $\bar{U}_\gamma$  — энергии деформации оболочки на единицу длины  $\gamma$  (границы области  $G$ ). Именно:

$$\bar{U}_\gamma = \frac{D}{2} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} v'^2 ds + \frac{D'}{2} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{u^2}{\rho^2} ds.$$

Соответствующая формула для существенно закритических деформаций содержала еще два слагаемых. В данном случае, ввиду близости деформированной оболочки к исходной форме, эти слагаемые можно игнорировать.

Напомним, что в формуле для  $\bar{U}_\gamma$  величины  $u$  и  $v$  обозначают смещения (при деформации) соответственно по направлению главной нормали и бинормали кривой  $\gamma$  той точки поверхности, к которой  $\bar{U}_\gamma$  относится, а через  $D$  и  $D'$  обозначены жесткости оболочки на изгиб и растяжение-сжатие. Перемещения  $u$ ,  $v$  связаны соотношением

$$u' + \alpha v' + \frac{v'^2}{2} = 0,$$

где  $\alpha$  — угол между соприкасающейся плоскостью кривой  $\gamma$  и касательной плоскостью поверхности.

Так же, как в § 2, вместо переменных  $u$ ,  $v$ ,  $s$  вводим новые переменные  $\bar{u}$ ,  $\bar{v}$ ,  $\bar{s}$ , согласно формулам

$$\bar{u} = \frac{u}{\varepsilon \rho \alpha^2}, \quad \bar{v} = \frac{v'}{\alpha}, \quad \bar{s} = \frac{s}{\rho \varepsilon}, \quad \varepsilon^4 = \frac{\delta^2}{12 \rho^2 \alpha^2}.$$

Здесь  $\rho$  — радиус кривизны кривой  $\gamma$ ,  $\delta$  — толщина оболочки.

В новых переменных, черту над которыми мы для простоты записи опускаем, получим

$$\bar{U} = \frac{E\delta^{5/2}\alpha^{5/2}\rho^{-1/2}}{2 \cdot 12^{3/4}(1-v^2)} \int_{-\bar{\varepsilon}^*}^{\bar{\varepsilon}^*} (v'^2 + u^2) ds.$$

Пределы интегрирования  $\bar{\varepsilon}^*$  и  $-\bar{\varepsilon}^*$  неограниченно растут по абсолютной величине вместе с  $\rho\alpha/\delta$ . Поэтому, ограничиваясь случаем таких оболочек и деформаций, для которых  $\delta/\rho\alpha$  мало, пределы интегрирования можно заменить на  $\pm\infty$ . Тогда

$$\bar{U} = \frac{E\delta^{5/2}\alpha^{5/2}\rho^{-1/2}}{2 \cdot 12^{3/4}(1-v^2)} \int_{-\infty}^{\infty} (v'^2 + u^2) ds.$$

Как всегда, будем предполагать симметрию функции  $v(s)$  и антисимметрию  $u(s)$ . Тогда можно ограничиться интегрированием в пределах  $(0, \infty)$ . Поэтому

$$\bar{U} = \frac{E\delta^{5/2}\alpha^{5/2}\rho^{-1/2}}{12^{3/4}(1-v^2)} \int_0^{\infty} (v'^2 + u^2) ds.$$

Условимся обозначать ту часть области  $G$ , которая расположена вне рассматриваемой окрестности кривой  $\gamma$ , через  $A_1$ , саму окрестность — через  $A_{12}$ , а оставшуюся часть оболочки — через  $A_2$ . Найденное нами выражение для энергии  $\bar{U}$  существенно зависит от формы оболочки в переходной зоне  $A_{12}$ ; эта форма определяется функциями  $u, v$ , задающими деформацию. Так же, как при исследовании закритических деформаций в § 2, энергию  $\bar{U}$  мы определим из условия минимума при заданной общей деформации. Эту деформацию мы характеризуем разностью  $h$  составляющих по бинормали кривой  $\gamma$  изгибающих полей внутри и вне области  $G$ .

В исходных переменных  $v$  и  $s$  величина  $h$  допускает очевидное представление:

$$h = - \int_{-\bar{\varepsilon}^*}^{\bar{\varepsilon}^*} v' ds.$$

Если перейти к новым переменным и пределы интегрирования  $\bar{\varepsilon}^*$  и  $-\bar{\varepsilon}^*$  заменить на  $\pm\infty$ , то получим

$$h = - \frac{1}{12^{3/4}} \sqrt{\delta\rho\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} v ds,$$

или, учитывая предполагаемую симметрию функции  $v(s)$ ,

$$h = -\frac{2}{12^{1/4}} \sqrt{\delta\rho\alpha} \int_0^{\infty} v ds.$$

Таким образом, энергия  $\bar{U}$ , а следовательно, и функции  $u$ ,  $v$ , от которых она зависит, определяются из условия минимума функционала

$$\bar{U} = \frac{E\delta^{5/2}\alpha^{5/2}\rho^{-1/2}}{12^{3/4}(1-v^2)} \int_0^{\infty} (v'^2 + u^2) ds$$

при добавочном ограничении

$$-\frac{2}{12^{1/4}} \sqrt{\delta\rho\alpha} \int_0^{\infty} v ds = h = \text{const.}$$

Варьируемые функции  $u$ ,  $v$ , помимо указанной интегральной связи, удовлетворяют еще соотношению

$$u' + v + \frac{v^2}{2} = 0 \quad (*)$$

и обращаются в нуль на бесконечности.

Рассмотрим задачу о минимуме функционала  $\bar{U}$ . В связи с этим прежде всего преобразуем связь

$$-\frac{2}{12^{1/4}} \sqrt{\delta\rho\alpha} \int_0^{\infty} v ds = h$$

при помощи соотношения (\*). Если это соотношение проинтегрировать в пределах  $(-\infty, \infty)$  и учесть при этом, что  $u(-\infty) = u(\infty) = 0$ , то получим

$$-\int_{-\infty}^{\infty} v ds = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v^2}{2} ds.$$

Отсюда, принимая во внимание симметрию функции  $v(s)$ , получим

$$-\int_0^{\infty} v ds = \int_0^{\infty} \frac{v^2}{2} ds.$$

Следовательно, интегральная связь, которой подчинена функция  $v(s)$ , может быть представлена в виде

$$\frac{\sqrt{\delta\rho\alpha}}{12^{1/4}} \int_0^{\infty} v^2 ds = h.$$

Итак, наша вариационная задача состоит в определении минимума функционала

$$\bar{U} = \frac{E\delta^{5/2}\alpha^{5/2}\rho^{-1/2}}{12^{3/4}(1-\nu^2)} \int_0^{\infty} (v'^2 + u^2) ds$$

при условиях

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sqrt{\delta\rho\alpha}}{12^{1/4}} \int_0^{\infty} v^2 ds &= h = \text{const}, \\ u' + v + \frac{v^2}{2} &= 0, \\ u(0) = u(\infty) = v(\infty) &= 0. \end{aligned} \right\} (**)$$

Поскольку нас интересует начальная стадия закритической деформации, то в соотношении (\*) слагаемым  $v^2/2$  можно пренебречь, придав, таким образом, этому соотношению совсем простую форму:

$$u' + v = 0.$$

Если теперь всюду заменить  $v$  на  $-u'$ , то приходим к задаче о минимуме функционала

$$\bar{U} = \frac{E\delta^{5/2}\alpha^{5/2}\rho^{-1/2}}{12^{3/4}(1-\nu^2)} \int_0^{\infty} (u'^2 + u^2) ds$$

с интегральной связью

$$\frac{\sqrt{\delta\rho\alpha}}{12^{1/4}} \int_0^{\infty} u'^2 ds = h = \text{const}$$

при краевых условиях для варьируемой функции:

$$u(0) = 0, \quad u(\infty) = 0.$$

Согласно методу Эйлера—Лагранжа, наша вариационная задача сводится к рассмотрению безусловного экстремума функционала

$$W = \int_0^{\infty} \left\{ \frac{E\delta^{5/2}\alpha^{5/2}\rho^{-1/2}}{12^{3/4}(1-\nu^2)} (u^2 + u'^2) - \lambda \frac{\sqrt{\delta\rho\alpha}}{12^{1/4}} u'^2 \right\} ds,$$

где  $\lambda$ —некоторое постоянное.

Полагая для краткости

$$\sigma = \frac{\sqrt{12}(1-\nu^2)\rho\lambda}{E\alpha^2\delta^2},$$

можем считать, что речь идет об экстремуме функционала

$$J = \int_0^{\infty} (u^2 + u''^2 - \sigma u'^2) ds,$$

который отличается от  $W$  только постоянным множителем.

Уравнение Эйлера—Лагранжа для функционала  $J$

$$u^{IV} + u + \sigma u'' = 0.$$

Его общее решение—

$$u(s) = \sum c_k e^{\omega_k s},$$

где  $\omega_k$ —корни характеристического уравнения

$$\omega^4 + 1 + \sigma \omega^2 = 0.$$

Для того чтобы удовлетворить краевому условию  $u(\infty) = 0$ , надо, чтобы среди характеристических корней  $\omega_k$  были два корня с отрицательной вещественной частью. Если эти корни обозначить  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , то решение нашей вариационной задачи дает функция вида

$$u = c_1 e^{\omega_1 s} + c_2 e^{\omega_2 s}.$$

Для того чтобы удовлетворить и второму краевому условию  $u(0) = 0$ , надо потребовать, чтобы

$$c_1 = -c_2 = c.$$

При этом для функции  $u(s)$  получается выражение

$$u = c(e^{\omega_1 s} - e^{\omega_2 s}).$$

Подставим найденную функцию в выражение функционала  $\bar{U}$  и в связь. Тогда получим

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} u'^2 ds &= -c^2 \left( \frac{\omega_1}{2} + \frac{\omega_2}{2} - \frac{2\omega_1\omega_2}{\omega_1 + \omega_2} \right), \\ \int_0^{\infty} u^2 ds &= -c^2 \left( \frac{1}{2\omega_1} + \frac{1}{2\omega_2} - \frac{2}{\omega_1 + \omega_2} \right), \\ \int_0^{\infty} u''^2 ds &= -c^2 \left( \frac{\omega_1^3}{2} + \frac{\omega_2^3}{2} - \frac{2\omega_1^2\omega_2^2}{\omega_1 + \omega_2} \right). \end{aligned}$$

Замечая, что в нашем случае корни  $\omega_1$  и  $\omega_2$  попарно сопряжены и равны единице по абсолютной величине,

можем записать

$$\omega_1 = e^{i\theta}, \quad \omega_2 = e^{-i\theta}.$$

Подстановка этих значений в наши интегралы дает

$$\int_0^{\infty} u'^2 ds = c^2 \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta},$$

$$\int_0^{\infty} (u^2 + u''^2) ds = c^2 \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta} (2 + 4 \cos^2 \theta).$$

Отсюда

$$\bar{U} = \frac{E \delta^5 \alpha^5 \rho^{-1/2}}{12^{3/4} (1 - \nu^2)} c^2 \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta} (2 + 4 \cos^2 \theta), \quad h = \frac{\sqrt{\delta \rho \alpha}}{12^{1/4}} c^2 \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta}.$$

Следовательно,

$$\bar{U} = \frac{E \delta^2 \alpha^2 h}{\sqrt{12} (1 - \nu^2) \rho} (2 + 4 \cos^2 \theta).$$

Минимум  $\bar{U}$  при  $h = \text{const}$  достигается для  $\theta = \frac{\pi}{2}$ .

И получаем следующее окончательное выражение для энергии деформации:

$$\bar{U} = \frac{E \delta^2 \alpha^2 h}{\sqrt{3} (1 - \nu^2) \rho}.$$

**З а м е ч а н и е.** Рассматривая существенно закритические деформации оболочки в § 2, мы предполагали малость области выпучивания  $G$  и соответственно малость угла  $\alpha$ . Это предположение было естественно, так как при больших  $\alpha$  на границе области  $G$  возникают значительные напряжения, заведомо превосходящие предел упругости материала оболочки. Рассматривая начальную стадию выпучивания, это предположение можно не вводить. При этом в формуле для энергии деформации вместо  $\alpha$  будет  $\sin \alpha$ . Далее, если дифференциальную связь между переменными  $u$  и  $v$  вводить не из условия равенства нулю деформаций в направлении, перпендикулярном кривой  $\gamma$ , как это сделано для простоты вывода, а из условия равенства нулю напряжений, то выражение энергии деформации получит множитель  $\sqrt{1 - \nu^2}$ . Принимая все это во внимание, мы примем для энергии деформации оболочки в начальной стадии выпучивания следующее выражение:

$$U = \int_{\gamma} \frac{E \delta^2 \sin^2 \alpha h}{\sqrt{3} (1 - \nu^2) \rho} ds.$$

Теперь, исходя из общего вариационного принципа, мы утверждаем следующий вариационный принцип В.

Если действующая на оболочку нагрузка критическая, то вариационная задача для функционала

$$W - A$$

на разрывных бесконечно малых изгибаниях срединной поверхности имеет нетривиальное решение, т. е. изгибающее поле, являющееся решением, не равно нулю тождественно.

Функционал  $W$  определен на бесконечно малых изгибаниях с разрывами, удовлетворяющими условию

$$\Delta \tau = h e,$$

где  $\Delta \tau$  — разрыв изгибающего поля, а  $e$  — единичный вектор бинормали кривой  $\gamma$ , вдоль которой происходит разрыв.

Слагаемое  $U$  функционала  $W$  — энергия деформации — определяется по формуле

$$U = \int_{\gamma} \frac{E \delta^3 \sin^2 \alpha h}{\sqrt{3(1-\nu^2)} \rho} ds.$$

Здесь  $\rho$  — радиус кривизны кривой  $\gamma$ , где происходит разрыв изгибающего поля;  $\alpha$  — угол между соприкасающейся плоскостью кривой  $\gamma$  и касательной плоскостью поверхности;  $h$  — составляющая разрыва изгибающего поля по бинормали кривой  $\gamma$ ,  $\delta$  — толщина оболочки,  $E$  — модуль упругости,  $\nu$  — коэффициент Пуассона. Интегрирование выполняется по дуге  $s$  кривой  $\gamma$ .

Слагаемое  $A$  функционала  $W$  определяется обычным образом, как производимая внешней нагрузкой работа при деформации, задаваемой изгибающим полем.

### 3. Потеря устойчивости выпуклых оболочек под внешним давлением

Применим вариационный принцип В к исследованию потери устойчивости выпуклой оболочки под внешним давлением. Начнем со сферической оболочки. Пусть сферическая оболочка с произвольным краем жестко закреплена вдоль края и находится под действием равномерного внешнего давления  $p$ . Пусть при этом давлении оболочка теряет устойчивость и начинает выпучиваться по некоторой области  $G$ , ограниченной кривой  $\gamma$ . Согласно вариаци-

ционному принципу В, существует не равное нулю изгибающее поле на поверхности с разрывом вдоль  $\gamma$ , для которого

$$\delta W = 0,$$

где варьирование по параметру деформации.

Так как край оболочки закреплен, то изгибающее поле вне области  $G$  равно нулю. Отсюда следует, что изгибающее поле на границе области  $G$  направлено по бинормали кривой  $\gamma$ .

Найдем выражения для слагаемых  $U$  и  $A$  функционала  $W$ . Имеем

$$U = \int_{\gamma} \frac{E \delta^2 \sin^2 \alpha h}{\sqrt{3(1-\nu^2)} \rho} ds.$$

Так как изгибающее поле вдоль  $\gamma$  направлено по бинормали кривой  $\gamma$ , то  $h \sin \alpha = h'$  есть составляющая изгибающего поля по геодезической нормали к кривой  $\gamma$  на поверхности. Далее  $\sin \alpha / \rho = 1/R$ , где  $R$  — радиус кривизны оболочки. Подставляя полученные выражения в формулу для  $U$ , получим

$$U = \int_{\gamma} \frac{E \delta^2 h'}{R \sqrt{3(1-\nu^2)}} ds.$$

Производимая внешним давлением работа

$$A = \iint_G p h_n dS,$$

где  $h_n$  — нормальная к поверхности оболочки составляющая изгибающего поля, а интегрирование выполняется по площади области  $G$ .

Отметим следующее равенство:

$$\int_{\gamma} h' ds = \frac{2}{R} \iint_G h_n dS. \quad (*)$$

Это геометрическое равенство допускает простую физическую интерпретацию. Оно выражает собой условие равновесия области  $G$  оболочки как безмоментной под действием единичной нагрузки, действующей по краю  $\gamma$  области  $G$ , и внешнего давления по поверхности величиной  $2/R$ .

С помощью равенства (\*) представим функционал  $W$  в виде

$$W = \left( \frac{2}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \left( \frac{\delta}{R} \right)^2 - p \right) \iint_G h_n dS.$$



Поскольку вариация второго сомножителя заведомо отлична от нуля, то

$$\frac{2}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \left( \frac{\delta}{R} \right)^2 - p = 0.$$

Таким образом, для сферической оболочки, закрепленной по краю, без каких-либо предположений о форме потери устойчивости получается величина критического давления

$$p = \frac{2}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \left( \frac{\delta}{R} \right)^2.$$

Заметим, что эта формула в точности совпадает с формулой, получаемой в линейной теории оболочек. Это имеет простое объяснение. В линейной теории критическая нагрузка получается из рассмотрения форм равновесия близких к исходной форме. При потере устойчивости воспринимаемая оболочкой нагрузка в известной мере сохраняется, в то время как форма упругого равновесия изменяется весьма значительно. Неудивительно, что принятое нами изучение этой формы приводит к той же величине критического давления.

Рассмотрим теперь вопрос о потере устойчивости общей выпуклой оболочки под внешним давлением при условии жесткого закрепления края. Пусть потеря устойчивости оболочки сопровождается выпучиванием малой области  $G$ , ограниченной кривой  $\gamma$ . Малость области  $G$  будем понимать по сравнению с радиусами кривизны оболочки.

Как и в случае сферической оболочки, изгибающее поле вне области  $G$  равно нулю. Следовательно, изгибающее поле на границе  $\gamma$  области  $G$  направлено по бинормали кривой  $\gamma$ . Найдем общее представление для таких полей.

Примем какую-нибудь точку  $P$  области  $G$  за начало декартовой системы координат, касательную плоскость — за плоскость  $xy$ , а нормаль к ней — за ось  $z$ . При этом, если за направление осей  $x$  и  $y$  принять главные направления поверхности в точке  $P$ , поверхность в области  $G$  при условии малости этой области можно задать уравнением

$$z = \frac{1}{2} (ax^2 + by^2),$$

где  $a$  и  $b$  — главные кривизны поверхности в точке  $P$ .

Введем на поверхности координаты  $u, v$ , полагая

$$x = \frac{u}{\sqrt{a}}, \quad y = \frac{v}{\sqrt{b}}.$$

В этих координатах наша поверхность задается уравнениями

$$x = \frac{u}{\sqrt{a}}, \quad y = \frac{v}{\sqrt{b}}, \quad z = \frac{1}{2}(u^2 + v^2).$$

Пусть  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  — составляющие изгибающего поля поверхности по осям  $x$ ,  $y$ ,  $z$  соответственно. Из уравнения бесконечно малых изгибов  $dr \cdot d\tau = 0$  получается следующая система уравнений для функций  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{a}} \xi_u + u \zeta_u &= 0, \\ \frac{1}{\sqrt{b}} \eta_v + v \zeta_v &= 0, \\ \frac{1}{\sqrt{b}} \eta_u + \frac{1}{\sqrt{a}} \xi_v + u \zeta_v + v \zeta_u &= 0. \end{aligned}$$

Если из этой системы исключить функции  $\xi$  и  $\eta$ , то для  $\zeta$  получается уравнение Лапласа

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial v^2} = 0.$$

Полагая

$$w = u + iv,$$

можем представить общее выражение для функции  $\zeta$  с помощью аналитической функции комплексного переменного  $w$ :

$$\zeta = \operatorname{Re} \zeta(w).$$

Что касается двух других составляющих изгибающего поля  $\xi$  и  $\eta$ , то они выражаются через функцию  $\zeta(w)$  по формулам

$$\begin{aligned} \xi &= \sqrt{a} \operatorname{Re} \left( -u \zeta(w) + \int \zeta(w) dw \right), \\ \eta &= \sqrt{b} \operatorname{Re} \left( -v \zeta(w) - i \int \zeta(w) dw \right). \end{aligned}$$

Положим

$$f(w) = \int \zeta(w) dw.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \zeta &= \operatorname{Re} f', \\ \xi &= \sqrt{a} \operatorname{Re} (-uf' + f), \\ \eta &= \sqrt{b} \operatorname{Re} (-vf' - if). \end{aligned}$$

Изгибающее поле на границе области  $G$ , т. е. на кривой  $\gamma$ , должно быть направлено по бинормали этой кривой.

Но, как мы знаем, это эквивалентно обращению в нуль составляющей поля по направлению кривой  $\gamma$ , т. е. условию

$$\xi dx + \eta dy + \zeta dz = 0.$$

Подставляя в это равенство выражения для  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$ ,  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , получим

$$\operatorname{Re}(f du - if dv) = 0,$$

или

$$\operatorname{Re} d\bar{w}f(w) = 0.$$

Существенно заметить, что параметры  $a$  и  $b$  в этом условии отсутствуют.

Найдем теперь выражения для слагаемых  $U$  и  $A$  функционала  $W$ . Имеем

$$U = \int_{\gamma} \frac{E \delta^2 \alpha^2 h ds}{\sqrt{3(1-v^2)} \rho}.$$

Ввиду малости области  $G$ , можно считать, что  $h = \zeta$ ,  $\frac{1}{\rho} = k_{\gamma}$ ,  $\alpha = \frac{k_n}{k_{\gamma}}$ , где  $k_{\gamma}$  — кривизна проекции кривой  $\gamma$  на плоскость  $xy$ ,  $k_n$  — нормальная кривизна поверхности в направлении  $\gamma$ . Таким образом,

$$U = \frac{E \delta^2}{\sqrt{3(1-v^2)}} \int_{\gamma} \frac{k_n^2}{k_{\gamma}} ds.$$

Введем на плоскости  $u, v$  полярные координаты  $r, \theta$ , полагая

$$u = r \cos \theta, \quad v = r \sin \theta.$$

В этих координатах получается следующее выражение:

$$\frac{k_n^2}{k_{\gamma}} ds = \frac{\sqrt{ab} (r^2 + r'^2)^2}{r^2 + 2r'^2 - r''r} d\theta,$$

где  $r(\theta)$  — функция, задающая кривую  $\gamma$ . Соответственно,

$$U = \frac{E \delta^2 \sqrt{ab}}{\sqrt{3(1-v^2)}} \int_0^{2\pi} \frac{(r^2 + r'^2)^2 \zeta}{r^2 + 2r'^2 - r''r} d\theta.$$

Ввиду малости области  $G$

$$A = \iint \rho \zeta dx dy = \frac{\rho}{\sqrt{ab}} \iint \zeta r dr d\theta.$$

Таким образом,

$$W = \frac{E\delta^2 \sqrt{ab}}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \int_0^{2\pi} \frac{(r^2 + r'^2)^2 \zeta}{r^2 + 2r'^2 - r''r} d\theta - \frac{p}{\sqrt{ab}} \iint_G \zeta r dr d\theta.$$

Возьмем теперь сферическую оболочку радиусом  $R = \frac{1}{\sqrt{ab}}$  и будем рассматривать для нее вопрос о потере устойчивости так же, как это мы делаем для общей выпуклой оболочки. При этом получим тот же функционал  $W$  и ту же для него математическую задачу. А так как для сферической оболочки критическое давление  $p$ , как мы знаем, определяется по формуле

$$p = \frac{2E}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \left( \frac{\delta}{R} \right)^2,$$

то для общей выпуклой оболочки критическое давление должно определяться по формуле

$$p = \frac{2E}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \delta^2 \sqrt{ab},$$

или

$$p = \frac{2E}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \frac{\delta^2}{R_1 R_2},$$

где  $R_1$  и  $R_2$  — главные радиусы кривизны.

Формула для критического давления на общую выпуклую оболочку была получена в книге [1]. Данное здесь решение отличается тем, что мы не делаем никаких предположений относительно характера потери устойчивости, кроме малости размеров области выпучивания  $G$  по сравнению с главными радиусами кривизны  $R_1$  и  $R_2$ .

Критическое внешнее давление для случая сферической оболочки экспериментально исследовалось многими авторами (см. [7]). Эти исследования показывают, что для геометрически совершенных сферических оболочек и совершенного закрепления оболочки вдоль края действительно получается теоретическое значение величины критического давления. В частности, значения критического давления, очень близкие к теоретическому значению, получались в эксперименте, который описан в § 2. Однако для сферических оболочек в реальных конструкциях наблюдается меньшее значение критического давления. Одна из причин этого состоит в несовершенстве формы оболочки. Полученная формула для критического дав-

ления в случае общей выпуклой оболочки позволяет количественно оценить влияние этого фактора. Именно: ввиду возможности потери устойчивости с выпучиванием малой области, как это предполагается в выводе формулы, для несовершенной сферической оболочки критическое давление определяется минимальным значением гауссовой кривизны и определяется по формуле

$$p = \frac{2E\delta^2}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} K_{\min}.$$

## § 5. ПОТЕРЯ УСТОЙЧИВОСТИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПРИ ОСЕВОМ СЖАТИИ

### 1. Специальные бесконечно малые изгибания цилиндрической оболочки

Мы будем рассматривать вопрос о потере устойчивости круговой цилиндрической оболочки при осевом сжатии равномерно распределенными усилиями по краям (рис. 24).

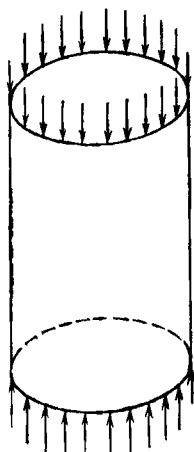


Рис. 24

Это рассмотрение будет основано на вариационном принципе В. В связи с этим сначала найдем все бесконечно малые изгибания цилиндрической поверхности с разрывами, удовлетворяющие известным условиям на линии разрыва.

Введем на цилиндрической поверхности координатную сеть  $u, v$ , приняв за линии  $u$  прямолинейные образующие, а за линии  $v$  — круговые, перпендикулярные им сечения. Координатой  $u$  будет взятое со знаком расстояние по образующей, а  $v$  — угол поворота при движении по круговому сечению.

Введем три единичных вектора  $e_1, e_2, e_3$ . Вектор  $e_1$  направлен по образующей, вектор  $e_2$  — по касательной к круговому сечению, а вектор  $e_3$  — по внешней нормали поверхности. При этом векторное уравнение нашей цилиндрической поверхности

$$r = ue_1 + Re_3(v),$$

где  $R$  — радиус кривизны поверхности.

Пусть

$$\tau = \xi e_1 + \eta e_2 + \zeta e_3$$

— изгибающее поле поверхности. Замечая, что

$$e_{1u} = e_{1v} = 0, \quad e_{2u} = e_{2v} = 0, \quad e_{3u} = e_3, \quad e_{3v} = -e_2,$$

из общих уравнений бесконечно малого изгибания

$$r_u \tau_u = 0, \quad r_v \tau_v = 0, \quad r_u \tau_v + r_v \tau_u = 0$$

получаются уравнения для функций  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$ :

$$\xi_u = 0, \quad \eta_v + \zeta = 0, \quad \xi_v + R\eta_u = 0.$$

Эта система уравнений легко интегрируется, и общее решение системы представляется в следующем виде:

$$\xi = \varphi(v), \quad \eta = \frac{1}{R} (-u\varphi' + \psi'), \quad \zeta = \frac{1}{R} (u\varphi'' - \psi''),$$

где  $\varphi$  и  $\psi$  — произвольные периодические с периодом  $2\pi$  функции переменного  $v$ .

Пусть теперь бесконечно малое изгибание поверхности имеет разрыв вдоль линии  $\gamma$ :  $u = u(v)$ , разбивающей поверхность на области  $G_1$  и  $G_2$  (рис. 25). Тогда функции  $\varphi$  и  $\psi$ , задающие изгибающие поля в областях  $G_1$  и  $G_2$ , будут различны. Положим

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \Delta\varphi, \quad \psi_2 - \psi_1 = \Delta\psi.$$

Для компонент разрыва изгибающего поля на линии  $\gamma$  будем иметь

$$\Delta\xi = \Delta\varphi, \quad \Delta\eta = \frac{1}{R} (-u \Delta\varphi' + \Delta\psi'),$$

$$\Delta\zeta = \frac{1}{R} (u \Delta\varphi'' - \Delta\psi'').$$

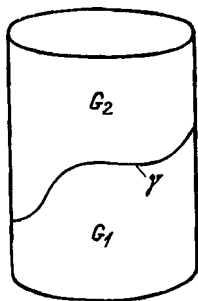


Рис. 25

Разрыв изгибающего поля вдоль линии  $\gamma$  не произволен. Вектор  $\Delta\tau$  должен быть направлен по бинормали кривой  $\gamma$ . Как мы знаем, это эквивалентно требованию, чтобы составляющая вектора  $\Delta\tau$  по касательной к  $\gamma$  была равна нулю, т. е.

$$r' \Delta\tau = 0.$$

Подставляя сюда  $\Delta\tau = e_1 \Delta\xi + e_2 \Delta\eta + e_3 \Delta\zeta$  и  $r' = u'e_1 + Re_2$ , получим

$$u' \Delta\xi + R \Delta\eta = 0,$$

или

$$u'(v) \Delta\varphi + (-u(v) \Delta\varphi' + \Delta\psi') = 0.$$

Это есть то условие, которому подчинены функции  $\varphi$  и  $\psi$ , задающие изгибающее поле в областях  $G_1$  и  $G_2$  поверхности.

До сих пор мы ничего не сказали о характере закрепления оболочки вдоль края. Мы будем предполагать, что закрепление оболочки исключает радиальные перемещения на обоих краях. При этом функция  $\psi$  выражается через  $\varphi$ . Действительно, если на краю  $u = a = \text{const}$ ,  $\zeta = \frac{1}{R}(a\varphi'' - \psi'') = 0$ , то  $\psi' = a\varphi' + c$ ,  $c = \text{const}$ . Соответственно, изгибающее поле в области  $G$ , прилегающей к краю, будет

$$\xi = \varphi, \quad \eta = \frac{1}{R}((a-u)\varphi' + c), \quad \zeta = \frac{1}{R}(a-u)\varphi''.$$

На одном крае можно потребовать полное закрепление. Тогда в области, прилегающей к этому краю,  $\tau \equiv 0$ . При этом на другом крае закрепление должно исключать только радиальные перемещения.

## 2. Исследование потери устойчивости цилиндрической оболочки при осевом сжатии

Найдем выражения для слагаемых  $U$  и  $A$  функционала  $W$ , к рассмотрению которого сводится вопрос о потере устойчивости. Имеем

$$U = \frac{E\delta^2}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \int_{\gamma} \frac{\sin^2 \alpha h}{\rho} ds,$$

где  $h$  — разрыв изгибающего поля вдоль  $\gamma$ ,  $\rho$  — радиус кривизны кривой  $\gamma$ , а  $\alpha$  — угол между соприкасающейся плоскостью кривой  $\gamma$  и касательной плоскостью поверхности. Вместо  $h$  удобно ввести разрыв изгибающего поля  $\Delta\zeta$  по нормали к поверхности. Так как вектор  $\Delta\tau$  направлен по бинормали кривой  $\gamma$ , то  $\Delta\zeta = h \cos \alpha$ . Формула для  $U$  принимает вид

$$U = \frac{E\delta^2}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \int_{\gamma} \frac{\sin^2 \alpha \Delta\zeta}{\cos \alpha \rho} ds.$$

Введем в рассмотрение нормальную кривизну  $k_n$  поверхности в направлении кривой  $\gamma$  и геодезическую кривизну  $k_g$  кривой  $\gamma$ . Имеем

$$\frac{1}{\rho} \sin \alpha = k_n, \quad \frac{1}{\rho} \cos \alpha = k_g.$$

Отсюда следует

$$\frac{\sin^2 \alpha}{\rho \cos \alpha} = \frac{k_n^2}{k_g}.$$



Геодезическую кривизну  $k_g$  найдем, как обычную кривизну кривой  $\gamma$  на развертке цилиндра. Для нее получается выражение

$$k_g = \frac{1}{R^2} \frac{u''}{\left(1 + \frac{u'^2}{R^2}\right)^{3/2}}.$$

Найдем нормальную кривизну поверхности в направлении кривой  $\gamma$ . По формуле Эйлера

$$k_n = \frac{1}{R} \sin^2 \beta,$$

где  $\beta$  — угол, под которым пересекает кривая  $\gamma$  образующую цилиндра. Имеем

$$c \operatorname{tg} \beta = \frac{u'}{R}, \quad \sin^2 \beta = \frac{1}{1 + \frac{u'^2}{R^2}}.$$

Таким образом,

$$k_n = \frac{1}{R \left(1 + \frac{u'^2}{R^2}\right)}.$$

Элемент дуги кривой  $\gamma$

$$ds = R \left(1 + \frac{u'^2}{R^2}\right)^{1/2} dv.$$

В итоге в интересующем нас выражении можно сделать замену:

$$\frac{\sin^2 \alpha}{\rho \cos \alpha} ds = \frac{R dv}{u''}.$$

Найдем теперь  $\Delta \zeta$  на линии разрыва  $\gamma$ . Имеем

$$\Delta \zeta = \frac{1}{R} (u \Delta \varphi'' - \Delta \psi'').$$

Известное условие на разрыв изгибающего поля дает соотношение

$$u' \Delta \varphi - u \Delta \varphi' + \Delta \psi' = 0.$$

Дифференцируя это соотношение, получим

$$u'' \Delta \varphi - u \Delta \varphi'' + \Delta \psi'' = 0.$$

Отсюда следует, что вдоль линии  $\gamma$

$$\Delta \zeta = \frac{1}{R} u'' \Delta \varphi.$$

В итоге для слагаемого  $U$  функционала  $W$  получается следующее простое выражение:

$$U = \frac{E\delta^2}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \int_0^{2\pi} \Delta\varphi \, d\nu.$$

Найдем теперь слагаемое  $A$  функционала  $W$ . Это слагаемое есть работа, производимая внешней нагрузкой при деформации, определяемой бесконечно малым изгибанием. Пусть  $p$  — величина нагрузки на единицу площади поперечного сечения оболочки. Тогда так как сокращение образующей  $\Delta\xi = \Delta\varphi$ , то работа, производимая нагрузкой  $p$ , равна

$$A = \int_0^{2\pi} p\delta \Delta\varphi R \, d\theta.$$

Теперь функционал

$$W = U - A = \left( \frac{E\delta^2}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} - pR\delta \right) \int_0^{2\pi} \Delta\varphi \, d\nu.$$

Так как вариация второго слагаемого заведомо отлична от нуля, а при потере устойчивости  $\delta W = 0$ , то для критической нагрузки должно быть

$$\frac{E\delta^2}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} - pR\delta = 0.$$

Отсюда получается величина критической нагрузки

$$p = \frac{E}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \left( \frac{\delta}{R} \right). \quad (*)$$

Эта формула в точности совпадает с формулой для критической нагрузки, которую дает линейная теория оболочек [5].

Известно, что в тщательно поставленных экспериментах с геометрически совершенными оболочками действительно наблюдается критическая нагрузка, даваемая формулой (\*) [7]. В частности, такие значения критической нагрузки наблюдались в эксперименте, который описан в § 4. Известно также, что в реальных конструкциях потеря устойчивости цилиндрических оболочек при осевом сжатии наступает при меньшем значении нагрузки. Обычно это объясняется тремя причинами: несовершенством формы оболочки, неравномерностью нагружения и начальным напряженным состоянием, возникающим при закреплении

края оболочки. В рамках принятой нами геометрической модели явления влиянию несовершенства формы и неравномерности нагружения можно дать количественную оценку.

Дело в том, что в нашем рассмотрении на кривую  $\gamma$  не накладывалось никаких ограничений, так же как и на величину разрыва изгибающего поля вдоль образующей  $\Delta\varphi$ , кроме, конечно, постоянства знака. Поэтому можно было вести рассмотрение для произвольной кривой  $\gamma$  и существенном разрыве поля  $\Delta t$  в малом интервале значений  $u$ . Тогда, не предполагая постоянства нагрузки  $p$  вдоль края, мы получили бы для ее максимального значения выражение (\*).

Те же соображения позволяют заключить, что при несовершенстве формы оболочки, отклонении от окружности в поперечном сечении, критическая нагрузка определяется по формуле (\*), где в качестве  $R$  надо брать наибольший радиус кривизны поперечного сечения.

### 3. Ограничение на применение вариационного принципа В при исследовании потери устойчивости разворачивающихся оболочек

Применение вариационного принципа В к исследованию потери устойчивости оболочек связано с рассмотрением вариационной задачи для функционала

$$W = U - A,$$

где  $U$  — энергия деформации, определяемая изгибающим полем и вычисляемая по формуле

$$U = \int_{\gamma} \frac{E \delta^2 \sin^2 \alpha h}{\sqrt{3(1-\nu^2)} \rho} ds.$$

Эта формула выведена в предположении, что кривизна поверхности оболочки в направлении линии разрыва изгибающего поля отлична от нуля. Это условие всегда выполнено для строго выпуклых оболочек (с положительной гауссовой кривизной). Для разворачивающихся, в частности, цилиндрических оболочек это условие не выполняется для линий разрыва, касающихся образующих или пересекающих образующие под малым углом. В связи с этим, когда вариационная задача для функционала  $W$  приводит к необходимости учитывать и такие линии разрыва изгибающего поля, рассмотрение теряет смысл.

Именно такая ситуация возникает при рассмотрении потери устойчивости цилиндрической оболочки при нагружении внешним давлением и кручении. Применение вариационного принципа В к исследованию потери устойчивости в этих случаях требует уточнения выражения для энергии деформации. Попытка найти такое уточнение для выражения энергии деформации содержится в работе [8], а применение этого уточненного выражения к исследованию потери устойчивости цилиндрической оболочки при внешнем давлении и кручении дано в работе [9].

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Погорелов А. В. Геометрические методы в нелинейной теории упругих оболочек.— М.: Наука, 1967.
- [2] Погорелов А. В. Исследование напряжений при выпучивании сферической оболочки.— М.: ДАН СССР, 1970, т. 191, № 2.
- [3] Погорелов А. В. К теории выпуклых упругих оболочек в закритической стадии.— Харьков: Изд-во Харьк. ун-та, 1960.
- [4] Погорелов А. В. Внешняя геометрия выпуклых поверхностей.— М.: Наука, 1969.
- [5] Вольмир А. С. Гибкие пластинки и оболочки.— М.: Гостехиздат, 1956.
- [6] Векуа И. Н. Обобщенные аналитические функции.— М.: Гостехиздат, 1959.
- [7] Григолюк Э. И., Кабаиов В. В. Устойчивость оболочек.— М.: Наука, 1978.
- [8] Погорелов А. В. Энергия упругой деформации выпучивания развертывающихся оболочек.— М.: ДАН СССР, 1978, т. 242, № 3.
- [9] Погорелов А. В. Потеря устойчивости цилиндрических оболочек.— М.: ДАН СССР, 1979, т. 245, № 2.

*Алексей Васильевич Погорелов*

## ИЗГИБАНИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ И УСТОЙЧИВОСТЬ ОБОЛОЧЕК

Редактор *Т. А. Панькова*  
Художественный редактор *Г. М. Коровина*  
Технический редактор *Е. В. Морозова*  
Корректор *Н. Д. Дорохова*

ИБ № 12878

Сдано в набор 21.11.85. Подписано к печати 06.04.86.  
Формат 84×108<sup>1</sup>/<sub>32</sub>. Бумага тип. № 1. Гарнитура  
литературная. Печать высокая. Усл. печ. л. 5,04.  
Усл. кр.-отт. 5,25. Уч.-изд. л. 4,38. Тираж 4 000 экз.  
Заказ № 1921. Цена 65 коп.

Ордена Трудового Красного Знамени  
издательство «Наука»  
Главная редакция физико-математической литературы  
117071 Москва В-71, Ленинский проспект, 15

Ордена Октябрьской Революции  
и ордена Трудового Красного Знамени  
МПО «Первая Образцовая типография  
имени А. А. Жданова» Союзполиграфпрома  
при Государственном комитете СССР по делам  
издательств, полиграфии и книжной торговли.  
113054 Москва М-54, Валуевая, 28

Отпечатано во 2-й типографии издательства «Наука»,  
121099 Москва Г-99, Шубинский пер., 6. 2560